Ist das Wasser aber durch radiale Wandungen an der relativen Drehung gegen das Gefäss verhindert, oder etwa zu Eis erstarrt und an dem Gefässe festgefroren, so muss es an der Drehung theilnehmen, und es gilt nun Gl. 9, welche für p einen kleineren Werth ergiebt als Gl. 10.

Werden zwei im Äusseren übereinstimmende Gefässe der ersten und der zweiten Art auf eine schiefe Ebene neben einander gesetzt und losgelassen, so wird das erste Gefäss schneller laufen als das zweite.

Ist das Gefäss so dünnwandig, dass man seine Massen M und μ gegen die des Wassers M_1 und μ_1 vernachlässigen kann, so wird im ersten Falle

$$p = g \sin \alpha, \tag{11}$$

im anderen Falle mit $\mu_1 = {}^1/_2 M_1$:

$$p = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \tag{12}$$

Man würde daher durch einen Rollversuch feststellen können, ob die Wasserfüllung sich gegen das Gefäss frei drehen kann oder nicht.

15. Anhalten eines Eisenbahnzuges durch Bremsung.

Die beschleunigte oder verzögerte Bewegung der Fuhrwerke wurde schon im 1. Theile, S. 302, jedoch ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, behandelt. Bei schnell fahrenden Eisenbahnzügen ist aber, wie schon im 1. Theile, S. 256, gesagt wurde, der Luftwiderstand so erheblich, dass er die übrigen Widerstände übersteigt. Daher soll an dieser Stelle der besonders wichtige Fall des Anhaltens eines Eisenbahnzuges mit Rücksicht auf den Luftwiderstand als Ergänzung des früher gegebenen behandelt werden.

Die Untersuchung bezieht sich auf einen einzelnen Wagen (Fig. 187); wie dieselbe dann auf einen ganzen Zug angewandt werden kann, soll im Beispiele gezeigt werden.

Wie schon im 1. Theile, S. 302 erläutert, müssen bei einem beschleunigten Fuhrwerke drei Massen von einander unterschieden werden:

1. die Masse M der rollenden Theile, d. h. der Achsen und Räder;
2. die auf den Halbmesser R des Rollkreises bezogene Masse μ der rollenden Theile;
3. die Masse M_1 der übrigen Theile des Fuhrwerks, welche nur an der Verschiebung, nicht an der Drehung, theilnehmen.

Ist v die Geschwindigkeit des Zuges, F seine Querschnittsfläche, γ das Gewicht von 1 $^{\text{cbm}}$ Luft, so kann der Luftwiderstand nach 2. Theil, S. 353, Gl. 4

$$W = \frac{\gamma}{g} F \cdot v^2 \tag{1}$$

gesetzt werden. Unter Hinzufügung dieser Kraft W wird aus Gl. 9, 1. Theil, S. 303:

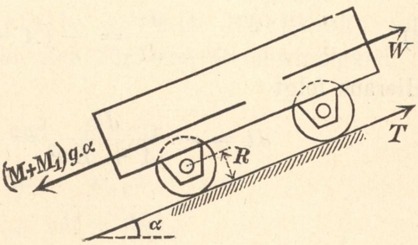
$$Mp = Mg \sin\alpha + M_1 g \sin\alpha - M_1 p - T - W,$$

wenn p die abwärts gerichtete Beschleunigung des Wagens bedeutet; oder, wenn man für schwache Gefälle $\sin\alpha$ mit α vertauscht (Fig. 188):

$$(M + M_1)p = (M + M_1)g \cdot \alpha - T - W. \tag{2}$$

Für die Umfangsbeschleunigung p der Drehung der Räder ist die zwischen Rad und Schiene auftretende Reibung T die beschleunigende Kraft mit dem Momente $T \cdot R$. Als Widerstandsmomente wirken demselben entgegen: 1. das Zapfenreibungsmoment, welches mit genügender Genauigkeit aus einem Zapfendrucke $M_1 g$ zu $M_1 g \cdot f \cdot r$ abgeleitet werden kann (wenn r der Zapfenhalbmesser); 2. das Moment des Rollwiderstandes, welches, ebenfalls annähernd, mit $(M + M_1) g \cdot e$ eingeführt werden darf (wenn e der Arm des Rollwiderstandes, s. 1. Theil, S. 248); 3. das Moment der Bremsreibung $P \cdot f_1 \cdot R$, wenn P die Summe der Bremsdrücke, f_1 die Reibungsziffer der Bremsklötze bedeuten. Hiernach wird

Fig. 188.



$$\mu \cdot p \cdot R = T \cdot R - M_1 g \cdot f \cdot r - (M + M_1) g \cdot e - P \cdot f_1 R$$

und somit

$$T = \mu p + M_1 g \cdot f \cdot \frac{r}{R} + (M + M_1) g \cdot \frac{e}{R} + P \cdot f_1.$$

Nennt man aber α_0 das Gleichgewichtsgefälle für sehr langsame Bewegung ohne Wirkung von Zugkraft, Bremskraft und

Luftwiderstand, so kann für die Summe vom Zapfenreibungs- und Rollwiderstand nach 1. Theil, S. 304 abgekürzt gesetzt werden:

$$M_1 g \cdot f \cdot \frac{r}{R} + (M + M_1)\, g \cdot \frac{e}{R} = (M + M_1)\, g \cdot \alpha_0\,,$$

womit $$T = \mu p + (M + M_1)\, g \cdot \alpha_0 + P \cdot f_1$$

wird. Führt man dies in Gl. 2 ein, so entsteht

3) $$p = \frac{(M + M_1)\, g\, (\alpha - \alpha_0) - P \cdot f_1 - \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot v^2}{M + M_1 + \mu}\,.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

4) $$\frac{(M + M_1)\, g\, (\alpha - \alpha_0) - P \cdot f_1}{M + M_1 + \mu} = - A\,,$$

5) $$\frac{\gamma}{g} \frac{F}{M + M_1 + \mu} = B\,,$$

so wird $$p = - A - B \cdot v^2 = - (A + B \cdot v^2)\,,$$ oder

6) $$\frac{dv}{dt} = - (A + B \cdot v^2)\,.$$

Hieraus folgt

$$dt = - \frac{dv}{A + B v^2} = - \frac{1}{A} \frac{dv}{1 + \frac{B}{A} \cdot v^2}\,,$$ oder

$$dt = - \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \frac{d\left(v \sqrt{\frac{B}{A}}\right)}{1 + \frac{B}{A} \cdot v^2}\,.$$

Somit ergiebt sich durch Integration

$$t = - \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \operatorname{arc\,tg} v \sqrt{\frac{B}{A}} + C\,.$$

War für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ und soll sie für $t = t_1$ zu Null geworden sein, so ist **die zum Anhalten des Zuges erforderliche Zeit** t_1 leicht bestimmt zu

7) $$t_1 = \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \operatorname{arc\,tg} c \sqrt{\frac{B}{A}}\,.$$

Um die zum Anhalten erforderliche **Wegeslänge** a zu erhalten, multiplicire man Gl. 6 mit

$$2\,v\cdot dt = 2\,dx;$$

dann wird
$$\frac{2\,v\cdot dv}{A + B\cdot v^2} = -\,2\cdot dx,$$

$$\frac{2\,B\cdot v\cdot dv}{A + B\cdot v^2} = -\,2\,B\cdot dx, \quad \text{also}$$

$$\mathfrak{l}\,(A + B\cdot v^2) = -\,2\,B\cdot x + C_1.$$

Mit $v = c$ für $x = 0$ wird $C_1 = \mathfrak{l}\,(A + Bc^2)$, also

8)
$$\mathfrak{l}\,\frac{A + B\cdot c^2}{A + B\cdot v^2} = 2\,B\cdot x;$$

die Bremsstrecke $x = a$ folgt für $v = 0$ zu

9)
$$a = \frac{1}{2\,B}\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{B}{A}\,c^2\right), \quad \text{oder}$$

10)
$$a = \frac{2{,}3026}{2\,B}\log\left(1 + \frac{B}{A}\,c^2\right).$$

Das **Gleichgewichtsgefälle** α_1 **mit Rücksicht auf den Luftwiderstand** ergiebt sich für eine Geschwindigkeit c, indem man in Gl. 3 einführt:

$$p = 0 \quad \text{und} \quad P = 0.$$

Dann wird

11)
$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g}\,\frac{F\cdot c^2}{(M + M_1)\,g}.$$

Beispiel: Ein Schnellzug, bestehend aus Lokomotive, Tender, Gepäckwagen, Postwagen und fünf Personenwagen, fahre mit einer Geschwindigkeit $c = 20\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}} = 72\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h.}}$; es soll die zum Anhalten erforderliche Bremszeit t_1 und Bremsstrecke a berechnet werden, u. zw. auf wagerechter Strecke $(\alpha = 0)$ und auf einem Gefälle $\alpha = 1:200$.

Die Lokomotive wiege 42^{t}, der Tender 20^{t}, der übrige Zug 105^{t}, der ganze Zug also $(M + M_1)\,g = 167^{\mathrm{t}}$. Das auf den Rollkreis bezogene Gewicht der Achsen und Räder, d. h. nahezu das Gewicht der sämmtlichen Radreifen betrage $\mu g = 14^{\mathrm{t}}$. Die Summe aller Bremsdrücke sei etwa gleich dem halben Gewichte des Zuges, nämlich rund $P = 84^{\mathrm{t}}$, die Reibungsziffer der Bremsklötze $f_1 = 1/7$. Dann wird nach Gl. 4:

$$A = \frac{84\cdot 1/7 - 167\,(\alpha - \alpha_0)}{167 + 14}\cdot 9{,}81,$$

oder, wenn man (nach 1. Theil, S. 255) $\alpha_0 = 0{,}0025$ annimmt,

12)
$$A = 0{,}673 - 9{,}05\,\alpha.$$

Bei mittlerem Barometerstande und bei 0^0 C. wiegt 1 cbm Luft 1,29 kg, bei einer mittleren Temperatur von 10^0 C. daher (nach 2. Theil, S. 211)

$$\gamma = 1{,}29 \cdot \frac{273}{283} = 1{,}24 \text{ kg}.$$

Der Luftwiderstand ist nun aber bei einem längeren Zuge nicht allein von der Querschnittsfläche abhängig, sondern auch von der Länge des Zuges, weil mit letzterer der Reibungswiderstand der Luft wächst, der ebenfalls in W nach Gl. 1 enthalten sein muss. Nach Versuchen vom Geh. Reg.-Rath Alb. Frank (Hannover) liefert eine Lokomotive mit Tender zu F den Beitrag 7 qm, der dann folgende Gepäckwagen 1,7 qm, jeder folgende Post- oder Personenwagen 0,5 qm. Also ist hier zu schreiben:

$$F = 7 + 1{,}7 + 6 \cdot 0{,}5 = 11{,}7 \text{ qm}.$$

Hiermit wird nach Gl. 5:

13) $$B = 1{,}24 \cdot \frac{11{,}7}{181\,000} = 0{,}000\,080\,2\,.$$

Die zum Anhalten auf wagerechter Bahn erforderliche Zeit wird nach Gl. 7:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{0{,}673 \cdot 0{,}000\,080\,2}} \operatorname{arc\,tg} 20 \sqrt{\frac{0{,}000\,080\,2}{0{,}673}},$$

14) $$t_1 = 136{,}11 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}2183 = 136{,}11 \cdot \operatorname{arc}(12^0\,19') = 136{,}11 \cdot 0{,}215 = 29{,}3 \text{ sek.}$$

Die Bremsstrecke aber wird nach Gl. 9:

15) $$a = \frac{2{,}3026}{2 \cdot 0{,}000\,080\,2} \log\left(1 + \frac{0{,}000\,080\,2}{0{,}673} \cdot 20^2\right) = 290{,}8 \text{ m}.$$

Für $\alpha = {}^1/_{200} = 0{,}005$ ist nach Gl. 11

$$A = 0{,}673 - 0{,}045 = 0{,}628,$$

B wie vorstehend $= 0{,}000\,080\,2$, somit

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{0{,}628 \cdot 0{,}000\,080\,2}} \operatorname{arc\,tg} 20 \sqrt{\frac{0{,}000\,080\,2}{0{,}628}}$$

$$t_1 = 31{,}3 \text{ sek.}$$

17) $$a = \frac{2{,}3026}{0{,}000\,160\,4} \log\left(1 + \frac{0{,}000\,080\,2 \cdot 400}{0{,}628}\right) = 310{,}7 \text{ m}.$$

Das Gleichgewichtsgefälle für diesen Zug mit $c = 20$ ist nach Gl. 11:

$$\alpha_1 = 0{,}0025 + \frac{1{,}24}{9{,}81} \frac{11{,}7 \cdot 400}{167\,000},$$

18) $$\alpha_1 = 0{,}0025 + 0{,}0035 = 0{,}006 = \frac{1}{167}.$$

Will man Bremszeit t_1 und Bremsstrecke a unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes berechnen, so hat man B mit Null zu vertauschen. Hiermit nehmen nun die Gleichungen 7 und 9 die scheinbar unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Man kann diese Unbestimmtheit in bekannter Weise durch Differentiation beseitigen, kann aber auch durch einfache Überlegung das Ergebnis finden

In Gl. 7 wird nämlich bei sehr kleinem B auch der Unterschied zwischen dem Bogen und seiner Tangente sehr klein, so dass man dann (wie S. 82)

$$\operatorname{arc\,tg} c\sqrt{\frac{B}{A}} = c\sqrt{\frac{B}{A}}$$

setzen kann; hiermit verwandelt sich Gl. 7 in das einfache

19) $$t_1 = \frac{c}{A}.$$

In Gl. 7 kann, weil bei kleinem x $\mathfrak{l}(1+x) = x$ wird, bei kleinem B

$$\mathfrak{l}\left(1 + \frac{B}{A}c^2\right) = \frac{B}{A}c^2$$

gesetzt werden, womit dann Gl. 9 die einfache Form

20) $$a = \frac{c^2}{2A} \text{ annimmt.}$$

Da übrigens für $B = 0$ die Verzögerung nach Gl. 6 einfach $= A$ wird, so folgt $t_1 = \frac{c}{A}$ auch einfach aus dem Begriffe der Verzögerung und

$$a = \frac{c\,t_1}{2} = \frac{c^2}{2A}$$

aus der Grundeigenschaft der gleichförmig veränderten Bewegung.

Für wagerechte Bahn mit $A = 0{,}673$ (Gl. 12) und $c = 20\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$ wird

$$t_1 = \frac{20}{0{,}673} = 29{,}7^{\mathrm{s.}}; \quad a = 297{,}2^{\mathrm{m}}.$$

Für $\alpha = {}^1/_{200}$ mit $A = 0{,}628$ wird

$$t_1 = \frac{20}{0{,}628} = 31{,}8^{\mathrm{s.}}; \quad a = 318{,}5^{\mathrm{m}}.$$

Diese Zahlen weichen von den mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes erhaltenen nur so wenig ab, dass es zulässig ist, bei der Berechnung der Bremswirkung den Luftwiderstand zu vernachlässigen. Beim Bremsen genügt schon eine geringe Vermehrung des Bremsdruckes P oder der Reibungsziffer f_1, welche beide niemals ganz scharf zu bestimmen sind, um die Vernachlässigung des Luftwiderstandes auszugleichen.

Für die Ermittelung der erforderlichen Zugkraft hat der Luftwiderstand bei grosser Geschwindigkeit dagegen erheblichen Einfluss, insofern nach Gl. 18 bei dem angenommenen Zuge das Gleichgewichtsgefälle α_1, welches gleichbedeutend ist mit dem Verhältnisse der auf wagerechter Bahn erforderlichen Zugkraft zu dem Gewichte des Eisenbahnzuges, durch den Luftwiderstand von 0,0025 auf 0,006 vergrössert wird.

Auch für den Antrieb des **Fahrrades** spielt der Luftwiderstand eine nicht unbedeutende Rolle. Ist c die Geschwindigkeit des Radfahrers, so kann das Gleichgewichtsgefälle des besetzten Rades in Übereinstimmung mit Gl. 11, S. 243

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g}\,\frac{F c^2}{(M + M_1)\,g}$$

gesetzt werden. Darin bezieht sich α_0 auf den Einfluss der Reibungswiderstände an den Achsen, Kettengelenken u. dergl., sowie des Rollwiderstandes am Boden, das zweite Glied auf den Luftwiderstand. Zugleich bedeutet α_0 das Gefälle, auf dem das Rad mit sehr geringer Geschwindigkeit c ohne Kraftaufwand läuft. Die Reibungswiderstände sind an einem gut gearbeiteten und gut unterhaltenen Rade sehr gering; nicht unerheblich aber ist der Rollwiderstand auch auf guter Fahrstrasse, weil das Eindrücken des Luftreifen bei der Berührung mit dem Boden Quetschungen verursacht, die, wie schon im 1. Theile, S. 251 erläutert wurde, Gleitungen und daher Reibungswiderstände zur Folge haben. Eingehende Versuche darüber fehlen noch. Einstweilen möchten wir nach Angaben des Herrn Landes-Bauinspektors Gloystein in Celle für gute Strasse und gutes Rad $\alpha_0 = 0{,}007$ schätzen. Die Widerstandsfläche F, welche der Radfahrer der Luft darbietet, kann man unter günstigen Umständen zu $0{,}5\,^{\text{qm}}$ annehmen. Mit $\gamma = 1{,}24\,^{\text{kg}}/_{\text{cbm}}$ Luftgewicht ergiebt sich dann der Luftwiderstand zu

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot c^2 = \frac{1{,}24}{9{,}81} \cdot 0{,}5 \cdot c^2 = 0{,}063 \cdot c^2$$

in Kilogrammen, wenn c in $^{\text{m}}/_{\text{s.}}$ ausgedrückt ist. Bei einem Gesammtgewichte des besetzten Rades $(M + M_1)\,g = 90\,^{\text{kg}}$ würde hiernach das Gleichgewichtsgefälle

$$\alpha_1 = 0{,}007 + \frac{0{,}063}{90} c^2 = 0{,}007 \left(1 + \frac{c^2}{10}\right),$$

also bei $c = 4{,}5\,^{\text{m}}/_{\text{s.}} (= 16{,}2\,^{\text{km}}/_{\text{h.}})$

$$\alpha_1 = 0{,}007 \left(1 + \frac{4{,}5^2}{10}\right) = 0{,}021 = \frac{1}{47} \quad \text{werden.}$$

Daher ist auf wagerechter Bahn zur gleichmässigen Bewegung des Rades eine parallel zur Bahn wirkend gedachte Zugkraft

$$K = (M + M_1)\,g \cdot \alpha_1 = 90 \cdot 0{,}021 = 1{,}89\,^{\text{kg}}$$

und eine sekundliche Arbeit

$$E = K \cdot c = 1{,}89 \cdot 4{,}5 = 8{,}51\,^{\text{mkg}}/_{\text{s.}} \quad \text{erforderlich.}$$

Ist die Kettenübersetzung so eingerichtet, dass bei der Geschwindigkeit von $4{,}5\,^{\text{m}}/_{\text{s.}}$ die Kurbelachse in der Sekunde eine Umdrehung macht und beträgt der Kurbelhalbmesser $0{,}17\,^{\text{m}}$, der Hub der Füfse also $0{,}34\,^{\text{m}}$, so ist die mittlere Druckkraft des Fufses auf die Tretkurbel

$$P = \frac{8{,}51}{0{,}34} = 25\,^{\text{kg}}.$$

16. Elastische Schwingungen eines Eisenbahnwagens.

Von den Schwingungs-Bewegungen eines Eisenbahnwagens treten besonders hervor: die lothrechte Verschiebung, das Wogen, und die Drehschwingung um die wagerechte Querachse durch den