Für die Anfangsstellung, d. h. $\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 0$, $\cos\vartheta = 1$, geben diese Gleichungen selbstverständlich

$$p = 0;\quad \varepsilon = 0;\quad N = Mg;\quad u = 0;\quad \omega = 0;\quad w = 0.$$

Für die Endlage, d. h. $\vartheta = 90^0$, $\sin\vartheta = 1$, $\cos\vartheta = 0$, wird

$$p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2}};\quad \varepsilon = \frac{g}{e + \frac{i^2}{e}};\quad N = \frac{Mg}{1 + \frac{e^2}{i^2}};\quad u^2 = \frac{2g \cdot e}{1 + \frac{i^2}{e^2}};$$

$$\omega^2 = \frac{2g \cdot e}{e^2 + i^2};\quad w^2 = 0;$$

und, wenn v die Geschwindigkeit des anderen Endes,

$$v = u + (a - e)\omega, \quad \text{also}$$

$$v = a\sqrt{\frac{2g \cdot e}{e^2 + i^2}},$$

d. h. $v = a \cdot \omega$, wie es wegen $w = 0$ auch sein muss.

Da in der Endlage $w = 0$ ist, so stimmt beim Aufschlagen der Stange ihr Geschwindigkeitszustand mit dem einer unten drehbar befestigten (S. 209) überein, nicht aber der Beschleunigungs- und Kräftezustand. Bei der Vergleichung dieser Formeln mit denen auf S. 209—211 ist zu bedenken, dass i^2, bezogen auf den unteren Endpunkt (S. 209), gleichbedeutend ist mit $i^2 + e^2$ in den Formeln der S. 234—236.

Für eine materielle Gerade, d. h. einen Stab mit gleichmässig über seine Länge vertheilter Masse, also $e = {}^1/_2\, a$; $i^2 = {}^1/_{12}\, a^2$; $\frac{i^2}{e^2} = \frac{1}{3}$ wird in der Endlage

$$p = \frac{3}{4}g;\quad \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{a};\quad N = \frac{1}{4}Mg;\quad u^2 = \frac{3}{4}g \cdot a;\quad \omega^2 = \frac{3g}{a};$$

$$w^2 = 0;\quad v^2 = 3g \cdot a.$$

Hieraus folgt, wie es wegen $w = 0$ sein muss, $v = 2u$.

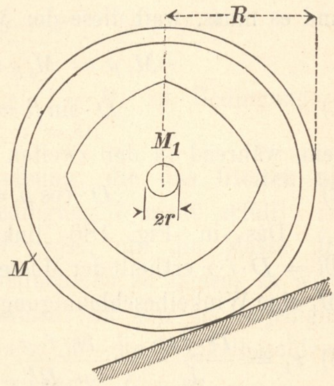
14. Rollbewegung auf schiefer Ebene.

Auf einer schiefen Ebene von der Neigung α rolle ein Umdrehungskörper von der Masse M (Fig. 185), dem Rollkreishalbmesser R und einem auf die Drehachse bezogenen Trägheitsmoment $J = \mu R^2$; er trage mittels einer Achse vom Durchmesser $d = 2r$ einen Körper von der Masse M_1 und dem auf dieselbe

Achse bezogenen Trägheitsmoment $J_1 = \mu_1 R^2$, Die Drehachse sei für beide Massen M und M_1 eine freie Achse. An der Tragachse der Masse M_1 möge Reibung auftreten.

Zu Anfang seien beide Massen in Ruhe. Auf schiefer Ebene erfährt nun die Masse M eine abwärts gerichtete beschleunigte Rollbewegung. Die Beschleunigung des Schwerpunktes sei p, dann muss die Winkelbeschleunigung der Drehung um die Achse (nach 1. Theil, S. 300) betragen

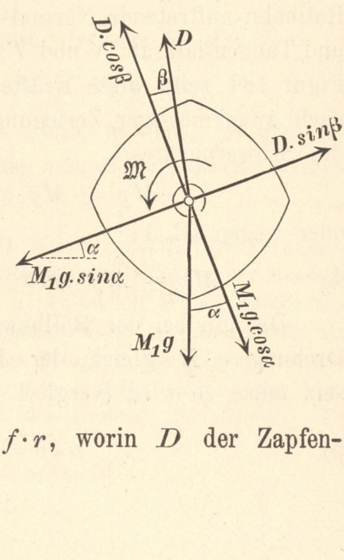
Fig. 185.



$$\varepsilon = \frac{p}{R}.$$

Die Masse M_1 muss nun die Verschiebung mit der Beschleunigung p vollständig mitmachen; eine Drehbeschleunigung ε_1 wird ihr nur durch das Moment der Zapfenreibung mitgetheilt, u. zw. tritt dieses Reibungsmoment in verschiedener Grösse auf, je nachdem die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Masse M_1 kleiner ist als diejenige der Masse M, oder den gleichen Werth hat. Im ersteren Falle kommt die volle Zapfenreibung zur Wirkung, im anderen Falle nur ein Theil derselben. Da nun beide Massen zu Anfang die Geschwindigkeit Null hatten und gleichförmig beschleunigte Bewegungen ausführen, so ist das Verhältnis von ω_1 zu ω gleich mit demjenigen von ε_1 zu ε.

Fig. 186.



Erster Fall, geringe Zapfenreibung: Die Zapfenreibung sei so gering, dass sie nicht im Stande ist, der Masse M_1 dieselbe Winkelbeschleunigung ε zu ertheilen, welche die Masse M erleidet. Dann tritt an den Zapfen ein Gleiten auf, und somit ein volles Reibungsmoment $D \cdot f \cdot r$, worin D der Zapfendruck, f die Reibungsziffer.

Der Zapfendruck D stimmt mit dem Gewicht $M_1 g$ nach Grösse und Richtung nicht ganz überein. Seine Richtung weiche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um den Winkel β ab (s. 1. Theil, S. 302). Zerlegt man die auf M_1 wirkenden Kräfte $M_1 g$ und D nach den Richtungen parallel zur schiefen Ebene und rechtwinklig dazu, so ergiebt sich (Fig. 186) in ersterer Richtung eine schräg abwärts gerichtete Gesammtkraft $M_1 g \sin\alpha - D\sin\beta$, und es muss, weil diese der Masse M_1 die Beschleunigung p ertheilt,

$$M_1 p = M_1 g \sin\alpha - D \sin\beta, \quad \text{oder}$$

1) $$D \cdot \sin\beta = M_1 g \sin\alpha - M_1 p$$

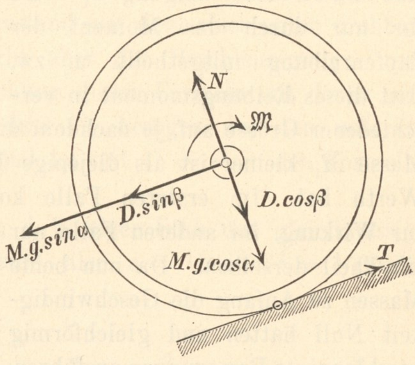
sein, während in der zweiten Richtung

2) $$D \cdot \cos\beta = M_1 g \cos\alpha \quad \text{wird.}$$

Das in Fig. 186 links herum drehende Reibungsmoment $\mathfrak{M} = D \cdot f \cdot r$ ertheilt der Masse M_1 eine Winkelbeschleunigung

3) $$\varepsilon_1 = \frac{D \cdot f \cdot r}{J_1} = \frac{D \cdot f \cdot r}{\mu_1 R^2}.$$

Fig. 187.



An der rollenden Masse M wirken die Schwere Mg, der Zapfendruck D, das Zapfenreibungsmoment $\mathfrak{M}$ im Sinne rechts herum und die an der Rollbahn auftretende Normal- und Tangentialkraft N und T; Figur 187 zeigt diese Kräfte nach zweckmässiger Zerlegung. Dann gilt für die Beschleunigung des Schwerpunktes

$$Mp = Mg \cdot \sin\alpha + D \cdot \sin\beta - T,$$

oder wegen Gl. 1:

4) $$Mp = Mg \cdot \sin\alpha + M_1 g \cdot \sin\alpha - M_1 p - T.$$

Da nun bei der Rollbewegung die Umfangsbeschleunigung der Drehung $\varepsilon \cdot R$ gleich der Beschleunigung p des Schwerpunktes sein muss, so wird (vergl. 1. Theil, S. 303)

5) $$\mu \cdot p = T - \frac{D \cdot f \cdot r}{R}.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von T in obige Gleichung ein, so entsteht:

$$6)\qquad (M + M_1 + \mu)p = (M + M_1)g \cdot \sin\alpha - Df\frac{r}{R},$$

worin mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ gesetzt werden kann. Diese Gleichung gilt, so lange an der Achse ein Gleiten stattfindet, so lange also $\varepsilon > \varepsilon_1$, oder $pR > R^2\varepsilon$, d. h.

$$7)\qquad \frac{(M + M_1)g \cdot \sin\alpha \cdot R - M_1 g \cdot f \cdot r}{M + M_1 + \mu} > \frac{M_1 g \cdot f \cdot r}{\mu_1}$$

ist. — Für reibungslose Lagerung ($f = 0$) ist Bedingung 7 erfüllt, daher Gleichung 6 gültig, mit $f = 0$.

Zweiter Fall; grössere Zapfenreibung, die das Gleiten an dem Zapfen verhindert. Ist die Bedingung 7 nicht erfüllt, ist vielmehr die Zapfenreibung genügend gross, um die Masse M_1 vollständig an der Drehung von M theilnehmen zu lassen, so wird $\varepsilon = \varepsilon_1$, und es tritt das Reibungsmoment $\mathfrak{M}$ nur in derjenigen Grösse auf, welche nöthig ist, der Masse M_1 die Winkelbeschleunigung $\varepsilon_1 = \varepsilon$ zu ertheilen, d. h., da wieder $\varepsilon \cdot R = p$,

$$8)\qquad \mathfrak{M} = \varepsilon \cdot J_1 = \varepsilon \cdot \mu_1 \cdot R^2 = p \cdot \mu_1 R.$$

Die Gleichungen 1 und 2 bleiben gültig, ebenso Gl. 4; an Stelle von Gl. 5 aber tritt die folgende:

$$\mu \cdot p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R} = T - \mu_1 \cdot p;$$

dies giebt $T = (\mu + \mu_1)p$, und hiermit wird aus Gl. 4:

$$9)\qquad (M + M_1 + \mu + \mu_1)p = (M + M_1)g \cdot \sin\alpha.$$

Diese Gleichung gilt auch für solche Fälle, in denen M und M_1 gegen einander unbeweglich sind, so dass man sie wie einen einzigen Körper auffassen kann.

Beispiel: Rollbewegung eines mit Wasser gefüllten Gefässes. Der rollende Körper sei ein dünnwandiges cylindrisches Gefäss von der Masse M und der auf den Umfang bezogenen Masse μ; er sei mit Wasser gefüllt von der Masse M_1 und der auf den Umfang bezogenen Masse μ_1. Betrachten wir das Wasser als vollkommen flüssig, d. h. ohne Fähigkeit, Reibungswiderstände auszuüben, so wird es beim Abwärtsrollen des Gefässes nur an der Verschiebungsbeschleunigung p, nicht aber an der Drehung theilnehmen. Es gilt daher Gl. 6 mit $f = 0$, d. h.

$$10)\qquad (M + M_1 + \mu)p = (M + M_1)g \cdot \sin\alpha.$$

Ist das Wasser aber durch radiale Wandungen an der relativen Drehung gegen das Gefäss verhindert, oder etwa zu Eis erstarrt und an dem Gefässe festgefroren, so muss es an der Drehung theilnehmen, und es gilt nun Gl. 9, welche für p einen kleineren Werth ergiebt als Gl. 10.

Werden zwei im Äusseren übereinstimmende Gefässe der ersten und der zweiten Art auf eine schiefe Ebene neben einander gesetzt und losgelassen, so wird das erste Gefäss schneller laufen als das zweite.

Ist das Gefäss so dünnwandig, dass man seine Massen M und μ gegen die des Wassers M_1 und μ_1 vernachlässigen kann, so wird im ersten Falle

11) $$p = g \sin \alpha ,$$

im anderen Falle mit $\mu_1 = {}^1/_2\, M_1$:

12) $$p = \frac{2}{3} g \sin \alpha .$$

Man würde daher durch einen Rollversuch feststellen können, ob die Wasserfüllung sich gegen das Gefäss frei drehen kann oder nicht.

15. Anhalten eines Eisenbahnzuges durch Bremsung.

Die beschleunigte oder verzögerte Bewegung der Fuhrwerke wurde schon im 1. Theile, S. 302, jedoch ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, behandelt. Bei schnell fahrenden Eisenbahnzügen ist aber, wie schon im 1. Theile, S. 256, gesagt wurde, der Luftwiderstand so erheblich, dass er die übrigen Widerstände übersteigt. Daher soll an dieser Stelle der besonders wichtige Fall des Anhaltens eines Eisenbahnzuges mit Rücksicht auf den Luftwiderstand als Ergänzung des früher gegebenen behandelt werden.

Die Untersuchung bezieht sich auf einen einzelnen Wagen (Fig. 187); wie dieselbe dann auf einen ganzen Zug angewandt werden kann, soll im Beispiele gezeigt werden.

Wie schon im 1. Theile, S. 302 erläutert, müssen bei einem beschleunigten Fuhrwerke drei Massen von einander unterschieden werden:

1. die Masse M der rollenden Theile, d. h. der Achsen und Räder;
2. die auf den Halbmesser R des Rollkreises bezogene Masse μ der rollenden Theile;
3. die Masse M_1 der übrigen Theile des Fuhrwerks, welche nur an der Verschiebung, nicht an der Drehung, theilnehmen.