wenn a die Gesammtlänge der Feder bezeichnet. Da nun der Schwerpunkt der ganzen Spirale von der Länge a bei vielen Windungen derselben nahezu im Anfangspunkte der Koordinaten liegt, so sind

$$\int_0^a y \cdot ds \quad \text{und} \quad \int_0^a x \cdot ds$$

annähernd Null, und es ist

$$10) \qquad \mathfrak{M}_0 = \frac{EJ_1}{a}\vartheta,$$

wenn J_1 das Trägheitsmoment des Querschnittes der Feder bedeutet. Somit wird

$$11) \qquad k^2 = \frac{EJ_1}{aJ} \quad \text{(Gl. 3)}$$

an Stelle von Gl. 5 treten, wobei J das Trägheitsmoment der Unruhe bedeutet, und die entsprechende Pendellänge

$$12) \qquad l = \frac{g}{k^2} = g\frac{J}{EJ_1}a,$$

ist mit der Federlänge a verhältnisgleich.

Es sei der Querschnitt der Feder $0{,}5 \cdot 0{,}04$ mm, das Trägheitsmoment also

$$J_1 = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}04^3}{12} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-6} \text{ mm}^4,$$

die Länge der Feder $a = 200$ mm; das Gewicht des Schwungrädchens $\mu g = 0{,}000\,25$ kg, sein Halbmesser 8 mm, sein Trägheitsmoment, bezogen auf Kilogramm und Millimeter, $J = \frac{0{,}016}{g}$, $E = 25\,000$ kg/qmm, somit

$$l = \frac{0{,}016 \cdot 200}{25000 \cdot \frac{8}{3} 10^{-6}} = 48 \text{ mm}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t_1 = 1{,}003\sqrt{0{,}048} = 0{,}22 \text{ Sekunden.}$$

13. Umfallende, auf dem Boden reibungslos ausgleitende Stange.

Eine Stange von der Länge a und dem Gewichte $M \cdot g$, die anfänglich lothrecht auf wagerechtem Boden stand (Fig. 181), falle nach rechts um; dann wird, wenn das untere Ende A der Stange nicht festgehalten ist, auch an demselben keine Reibung auftritt, der Boden nur einen lothrechten Normalwiderstand N auf die Stange übertragen. Der im Abstand e vom unteren Ende befindliche Schwerpunkt S der Stange wird sich, weil nur lothrechte Kräfte wirken, lothrecht abwärts bewegen, so dass, wenn die Stange auf dem Boden anlangt (Fig. 182), das untere Ende um $A_0A_1 = e$

nach links geglitten sein wird. Es sollen die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in beliebiger Zwischenlage und beim Aufschlagen berechnet werden.

In der beliebigen Zwischenlage (Fig. 183), wo die Mittellinie der Stange mit der Lothrechten den Winkel ϑ bildet, sei p die

Fig. 181.

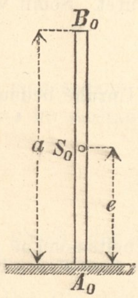


Fig. 182.

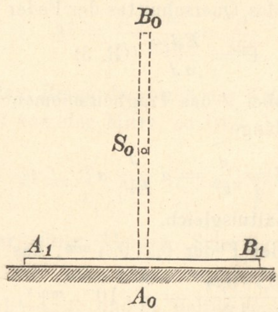
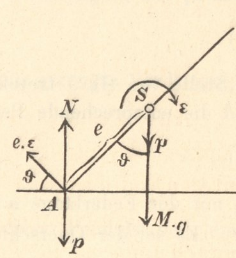


Fig. 183.



lothrecht gerichtete Beschleunigung des Schwerpunktes, ε die Winkelbeschleunigung um die rechtwinklig zur Bildebene gedachte Schwerpunktsachse, welche als freie Achse angenommen wird. Dann ist nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes

1) $$p = \frac{Mg - N}{M} \quad \text{und}$$

2) $$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{N \cdot e \cdot \sin\vartheta}{J} \quad \text{(s. S. 204, Gl. 1),}$$

wenn $J = M \cdot i^2$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die bezeichnete Schwerpunktsachse bedeutet.

Das untere Ende der Stange hat die lothrechte Beschleunigung p, die Umfangsbeschleunigung $e \cdot \varepsilon$. Da seine Gesammtbeschleunigung aber nur wagerecht sein kann, so muss p durch $e \cdot \varepsilon \cdot \sin\vartheta$ aufgehoben werden, mithin

3) $$\varepsilon = \frac{p}{e \cdot \sin\vartheta}$$

sein. Aus Gl. 2 und 3 ergiebt sich

$$N = \frac{p \cdot J}{e^2 \sin^2\vartheta}.$$

Hiermit bestimmt sich aus Gl. 1:

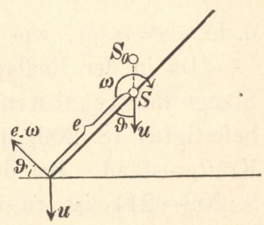
4) $$p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta}},$$

5) ferner $$\varepsilon = \frac{g}{e \cdot \sin \vartheta + \frac{i^2}{e \cdot \sin \vartheta}}$$ und

6) $$N = \frac{Mg}{1 + \frac{e^2 \sin^2 \vartheta}{i^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Beschleunigung jedes Punktes der Stange berechnen; diejenige des unteren Endes beträgt nach Fig. 183: $e \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta$.

Fig. 184.



Die Geschwindigkeiten lassen sich am einfachsten nach dem Satze der Arbeit berechnen. In der beliebigen Zwischenlage (Fig. 184) sei u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes (lothrecht gerichtet), ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den Schwerpunkt. Dann ist das Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$ nach 1. Theil, S. 296. Die Arbeit der Schwerkraft ist $Mg \cdot \overline{SS_0}$; es wird daher, weil $\overline{SS_0} = e(1 - \cos \vartheta)$, wenn man zugleich noch $J = M \cdot i^2$ setzt,

$$\frac{Mu^2}{2} + \frac{M \cdot i^2}{2} \omega^2 = Mg \cdot e(1 - \cos \vartheta),$$

oder weil, entsprechend Gl. 3, $\omega = \frac{u}{e \cdot \sin \vartheta}$ ist,

7) $$u^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{1 + \frac{i^2}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta}}$$ und

8) $$\omega^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta + i^2}.$$

Für die Geschwindigkeit w des unteren Endes gilt $w = e \cdot \omega \cos \vartheta$, also

9) $$w^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{tg^2 \vartheta + \frac{i^2}{e^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

Für die Anfangsstellung, d. h. $\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 0$, $\cos\vartheta = 1$, geben diese Gleichungen selbstverständlich

$$p = 0;\quad \varepsilon = 0;\quad N = Mg;\quad u = 0;\quad \omega = 0;\quad w = 0.$$

Für die Endlage, d. h. $\vartheta = 90^0$, $\sin\vartheta = 1$, $\cos\vartheta = 0$, wird

$$p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2}};\quad \varepsilon = \frac{g}{e + \frac{i^2}{e}};\quad N = \frac{Mg}{1 + \frac{e^2}{i^2}};\quad u^2 = \frac{2g\cdot e}{1 + \frac{i^2}{e^2}};$$

$$\omega^2 = \frac{2g\cdot e}{e^2 + i^2};\quad w^2 = 0;$$

und, wenn v die Geschwindigkeit des anderen Endes,

$$v = u + (a - e)\omega, \quad \text{also}$$

$$v = a\sqrt{\frac{2g\cdot e}{e^2 + i^2}},$$

d. h. $v = a\cdot\omega$, wie es wegen $w = 0$ auch sein muss.

Da in der Endlage $w = 0$ ist, so stimmt beim Aufschlagen der Stange ihr Geschwindigkeitszustand mit dem einer unten drehbar befestigten (S. 209) überein, nicht aber der Beschleunigungs- und Kräftezustand. Bei der Vergleichung dieser Formeln mit denen auf S. 209—211 ist zu bedenken, dass i^2, bezogen auf den unteren Endpunkt (S. 209), gleichbedeutend ist mit $i^2 + e^2$ in den Formeln der S. 234—236.

Für eine materielle Gerade, d. h. einen Stab mit gleichmässig über seine Länge vertheilter Masse, also $e = {}^1/_2\, a$; $i^2 = {}^1/_{12}\, a^2$; $\frac{i^2}{e^2} = \frac{1}{3}$ wird in der Endlage

$$p = \frac{3}{4}g;\quad \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{a};\quad N = \frac{1}{4}Mg;\quad u^2 = \frac{3}{4}g\cdot a;\quad \omega^2 = \frac{3g}{a};$$

$$w^2 = 0;\quad v^2 = 3g\cdot a.$$

Hieraus folgt, wie es wegen $w = 0$ sein muss, $v = 2u$.

14. Rollbewegung auf schiefer Ebene.

Auf einer schiefen Ebene von der Neigung α rolle ein Umdrehungskörper von der Masse M (Fig. 185), dem Rollkreishalbmesser R und einem auf die Drehachse bezogenen Trägheitsmoment $J = \mu R^2$; er trage mittels einer Achse vom Durchmesser $d = 2r$ einen Körper von der Masse M_1 und dem auf dieselbe