Masse eines jeden Theiles des Schiffes mit dem Quadrate seines Abstandes von der Schwerpunktsachse multipliciren und diese Produkte summiren. Gewöhnlich unterlässt man diese mühsame Rechnung, beobachtet vielmehr die Schwingungsdauer t_1, berechnet daraus die Schwingungslänge l_1 und schliesslich nach Gl. 8 das Trägheitsmoment J.

Das vorliegende Schiff gebrauche zu einer einfachen Roll-Schwingung $t_1 = 8^{s.}$; dem entspricht eine Schwingungslänge

$$l_1 = \frac{t_1^2}{1{,}003^2} = \frac{64}{1{,}003^2} = 63{,}62^{\text{m}}.$$

Hiermit wird nach Gl. 8

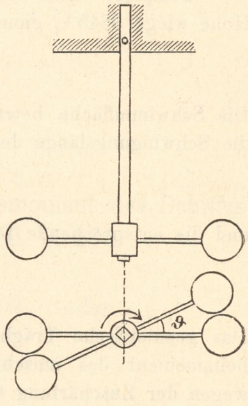
$$i^2 = l_1 \cdot \overline{SM} = 63{,}62 \cdot 0{,}6 = 38{,}17 \quad \text{und} \quad i = 6{,}18^{\text{m}}. \quad \text{Schliesslich}$$

$$J = Mi^2 = \frac{5845 \cdot 1000}{g} \cdot 38{,}17 = 22\,743\,000 .$$

12. Drehungspendel.

Ein elastischer, prismatischer Stab oder Draht sei an seinem oberen Ende fest eingespannt, auch gegen Drehung gesichert; an seinem unteren Ende sei ein Körper von solcher Massenvertheilung befestigt, dass die lothrechte Mittellinie des Stabes eine freie Achse des Körpers bilde (Fig. 179). Zu Anfang befinde sich das Ganze im Gleichgewichte. Wird nun der untere Körper um die lothrechte Achse gedreht, so entstehen in dem mitverdrehten Stabe Schubspannungen, die innerhalb der Elasticitätsgrenze mit dem Drehungswinkel verhältnisgleich sich ändern. Wird der Körper sodann losgelassen, so ertheilt das Spannungsmoment des Stabes dem Körper eine Winkelbeschleunigung, welche demnach verhältnisgleich ist der Winkelabweichung von der Gleichgewichtslage. Wird die Winkelabweichung für einen beliebigen Zeitpunkt mit ϑ bezeichnet, so ist, weil die Bewegung eine rückläufige, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$, die Winkelbeschleunigung

Fig. 179.



1) $$\varepsilon = -\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn $\mathfrak{M}$ das mit ϑ verhältnisgleiche Verdrehungs-, J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die lothrechte Achse bezeichnen. Die einfache Gl. 1 für ε ist hier verwendbar, weil nur Winkelbeschleunigungen und Drehungen um eine freie Achse in Frage kommen, so dass (nach 1. Theil, S. 297) die Bewegung wie eine Drehung um eine feste lothrechte Achse geschehen muss.

Für Gl. 1 kann man schreiben:

2) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -k^2 \cdot \vartheta; \quad \text{dann bedeutet}$$

3) $$k^2 = \frac{\mathfrak{M}}{J\vartheta}$$

die Winkelbeschleunigung für einen Verdrehungswinkel $\vartheta = 1 = 57{,}3^0$. Da Gl. 2 mit Gl. 5, S. 228 übereinstimmt, so ist sie die Differentialgleichung einer Schwingungsbewegung um die Gleichgewichtslage als Mitte, und die Dauer einer einfachen Schwingung ist nach Gl. 7, S. 229

4) $$t_1 = \frac{\pi}{k}.$$

Hat der Stab oder Draht den Halbmesser r und die freie Länge h, so ist bei einer stärksten Schubspannung τ nach 2. Theil, S. 65

$$\mathfrak{M} = \tau \cdot \frac{r^3\pi}{2} \quad \text{und zugleich} \quad \tau = \frac{G \cdot r \cdot \vartheta}{h},$$

wenn G das Gleitmafs des Stoffes, also

$$\mathfrak{M} = G\frac{r^4\pi}{2h}\vartheta \quad \text{und nach Gl. 3}$$

5) $$k^2 = G\frac{r^4\pi}{2h \cdot J}.$$

Beispiel: Der Draht habe $r = 0{,}1$ cm Halbmesser und $h = 100$ cm Länge Am unteren Ende sei ein Schwungring von 2 kg Gewicht und 30 cm mittlerem Halbmesser befestigt. Dann ist, weil bei der Rechnung mit Centimetern $g = 981$ gesetzt werden muss, $J = \frac{2 \cdot 30^2}{981}$ und mit $G = 800\,000$ at,

$$k^2 = \frac{800\,000 \cdot 0{,}1^4 \pi \cdot 981}{2 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 30^2} = 0{,}685;$$

$$k = 0{,}828; \quad t_1 = \frac{\pi}{0{,}828} = 3{,}8 \text{ s.}.$$

Kennt man Stärke und Gleitmafs des Drahtes nicht genau genug, so kann k^2 auch durch einen Verdrehungsversuch ermittelt werden. Ist R der Halbmesser des Schwungringes und setzt man $J = \mu R^2$, so ist $\mu \cdot g$ annähernd das Gewicht des Ringes. Bringt man nun mit Hülfe zweier Rollen und zweier Gewichtstücke $= {}^1\!/_2\, \mu g$ an dem Ringe zwei wagerechte Kräfte $= {}^1\!/_2\, \mu g$ so an, dass sie auf die lothrechte Achse ein Kräftepaar vom Momente

$$ {}^1\!/_2\, \mu g \cdot 2\,R = \mu g \cdot R $$

übertragen, so wird nach Gl. 3

$$ 6) \qquad k^2 = \frac{\mu g \cdot R}{\mu \cdot R^2 \vartheta} = \frac{g}{R\vartheta}. $$

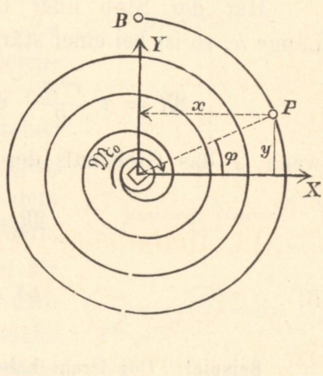
Misst man sodann an dem Ringe die durch das Kräftepaar erzeugte Verdrehung $R\vartheta = s$ im Abstande R von der Mitte, so ist

$$ 7) \qquad k^2 = \frac{g}{s} \quad \text{und} \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{s}{g}}, $$

d. h. gleich der Dauer einer kleinen Schwingung eines Pendels von der Schwingungslänge s.

Die Gleichungen 1—4, 6 und 7 gelten auch für die Schwingungen der sog. Unruhe einer Uhr. Die mit der Achse des Schwungrädchens verbundene Spiralfeder setzt der Verdrehung des Rades aus der Gleichgewichtslage ein Spannungsmoment entgegen, welches sich mit dem Verdrehungswinkel annähernd verhältnisgleich ändert.

Fig. 180.



Die Spiralfeder (Fig. 180) sei am äusseren Ende bei B eingespannt; in der Mitte, wo sich die Drehachse des Schwungrädchens befindet, werde auf das innere Ende der Feder eine in X und Y zerlegte Einzelkraft und ein Kräftepaar $\mathfrak{M}_0$ übertragen. Dann ist an einem Punkte P mit den Koordinaten x und y das Biegungsmoment

$$ 8) \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 - Xy + Yx. $$

Wird das Schwungrädchen aus der dem spannungslosen Zustande der Feder entsprechenden Lage um den Winkel ϑ gedreht, wobei es auf die Feder das Moment $\mathfrak{M}_0$ und die Kräfte X und Y ausübt, so ist ϑ der gesammte Verbiegungswinkel der Feder von der Mitte bis zum Endpunkte B. Für diesen gilt nach Keck, Elasticitätslehre, S. 227, Gl. 4:

$$ 9) \qquad EJ_1\vartheta = \int_0^a \mathfrak{M} \cdot ds = \mathfrak{M}_0\, a - X \int_0^a y \cdot ds + Y \int_0^a x \cdot ds, $$

wenn a die Gesammtlänge der Feder bezeichnet. Da nun der Schwerpunkt der ganzen Spirale von der Länge a bei vielen Windungen derselben nahezu im Anfangspunkte der Koordinaten liegt, so sind

$$\int_0^a y \cdot ds \quad \text{und} \quad \int_0^a x \cdot ds$$

annähernd Null, und es ist

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{E J_1}{a} \vartheta, \tag{10}$$

wenn J_1 das Trägheitsmoment des Querschnittes der Feder bedeutet. Somit wird

$$k^2 = \frac{E J_1}{a J} \quad \text{(Gl. 3)} \tag{11}$$

an Stelle von Gl. 5 treten, wobei J das Trägheitsmoment der Unruhe bedeutet, und die entsprechende Pendellänge

$$l = \frac{g}{k^2} = g \frac{J}{E J_1} a, \tag{12}$$

ist mit der Federlänge a verhältnisgleich.

Es sei der Querschnitt der Feder $0{,}5 \cdot 0{,}04$ mm, das Trägheitsmoment also

$$J_1 = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}04^3}{12} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-6} \text{ mm}^4,$$

die Länge der Feder $a = 200$ mm; das Gewicht des Schwungrädchens $\mu g = 0{,}00025$ kg, sein Halbmesser 8 mm, sein Trägheitsmoment, bezogen auf Kilogramm und Millimeter, $J = \frac{0{,}016}{g}$, $E = 25\,000$ kg/qmm, somit

$$l = \frac{0{,}016 \cdot 200}{25000 \cdot \frac{8}{3} 10^{-6}} = 48 \text{ mm}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t_1 = 1{,}003 \sqrt{0{,}048} = 0{,}22 \text{ Sekunden.}$$

13. Umfallende, auf dem Boden reibungslos ausgleitende Stange.

Eine Stange von der Länge a und dem Gewichte $M \cdot g$, die anfänglich lothrecht auf wagerechtem Boden stand (Fig. 181), falle nach rechts um; dann wird, wenn das untere Ende A der Stange nicht festgehalten ist, auch an demselben keine Reibung auftritt, der Boden nur einen lothrechten Normalwiderstand N auf die Stange übertragen. Der im Abstand e vom unteren Ende befindliche Schwerpunkt S der Stange wird sich, weil nur lothrechte Kräfte wirken, lothrecht abwärts bewegen, so dass, wenn die Stange auf dem Boden anlangt (Fig. 182), das untere Ende um $A_0 A_1 = e$