

Ebenso folgt für die anderen Achsen

$$2) \quad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} - (J_3 - J_1) \psi \cdot \varphi = \mathfrak{M}_y,$$

$$3) \quad J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2) \cdot \varphi \cdot \chi = \mathfrak{M}_z.$$

Dies sind die von Leonhard Euler im Jahre 1758 entwickelten Gleichungen für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

8. Bewegung des Kreisels.

Unter einem Kreisel denken wir uns einen Körper, bestehend aus einer Achse mit einem darauf befestigten Schwungringe. Dem Körper werde eine bedeutende Winkelgeschwindigkeit φ_0 um seine zunächst festgehaltene Achse ertheilt; setzt man ihn dann in beliebig schiefer Lage mit dem unteren Ende A der Achse in ein Kugellager, welches den Punkt A (nahezu) unbeweglich macht, oder befand er sich schon, bevor er in Drehung versetzt wurde, in einem solchen (Fig. 170), so fällt der Kreisel unter Einwirkung der Schwere nicht etwa um, wie es ohne die Drehung geschehen würde, vielmehr beschreibt die geometrische Achse des Kreisels bekanntlich eine Kegelfläche, deren Achse die durch A gelegte Lothrechte ist, wobei aber die Leitlinie nicht ein Kreis, sondern eine von zwei concentrischen Kreisen eingeschlossene, epicykloidenartige Kurve ist. Dies ergibt sich wie folgt:

Die geometrische Achse ist offenbar eine Hauptachse des Kreisels für den Punkt A und werde zur x -Achse genommen. Jede durch A rechtwinklig zur x -Achse gelegte Gerade ist ebenfalls eine Hauptachse. Wählt man die durch AX bestimmte lothrechte Ebene zur xz -Ebene, so liegen hierdurch die Achsen AZ und AY fest; letztere ist in Fig. 171 rechtwinklig zur Bildebene zu denken. Die Lothrechte durch den Punkt A werde

Fig. 170.

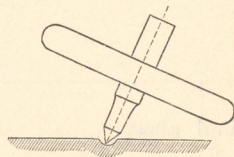
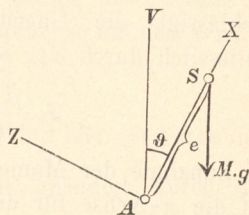


Fig. 171.



AV genannt; sie schliesse mit AX den veränderlichen Winkel ϑ ein. Da wegen der regelmässigen Gestalt des Kreisels das Trägheits-Ellipsoid für den Punkt A offenbar ein Umdrehungs-Ellipsoid, so ist $J_3 = J_2$.

Die Winkelgeschwindigkeiten sind

im Zeitpunkte $t = 0$: $\varphi_0, \chi_0 = 0, \psi_0 = 0,$

im Zeitpunkte t : $\varphi, \chi, \psi.$

Die Kraftmomente rühren, wenn man die Reibung im Kugellager vernachlässigt, nur vom Gewichte her; dann ist

$$\mathfrak{M}_x = 0; \quad \mathfrak{M}_y = M \cdot g \cdot e \sin \vartheta; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Hiernach wird aus den Euler'schen Gleichungen 1 bis 3, S. 215/6:

$$1) \quad J_1 \frac{d\varphi}{dt} = 0;$$

$$2) \quad J_2 \frac{d\chi}{dt} - (J_2 - J_1) \varphi \cdot \psi = M g e \sin \vartheta;$$

$$3) \quad J_2 \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2) \varphi \cdot \chi = 0.$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen folgen wir im Wesentlichen Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1. Aufl., S. 831.

Nach der ersten Gleichung ist φ unveränderlich, d. h.

$$4) \quad \varphi = \varphi_0.$$

Aus den Annahmen ergibt sich unmittelbar

$$5) \quad \chi = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Multipliziert man Gl. 2 mit $\chi \cdot dt = d\vartheta$ und Gl. 3 mit $\psi \cdot dt$, so entsteht

$$J_2 \chi \cdot d\chi - (J_2 - J_1) \varphi \cdot \chi \cdot \psi \cdot dt = M g e \sin \vartheta \cdot d\vartheta,$$

$$J_2 \psi \cdot d\psi - (J_1 - J_2) \varphi \cdot \chi \cdot \psi \cdot dt = 0.$$

Daraus wird durch zusammenzählen:

$$J_2 (\chi \cdot d\chi + \psi \cdot d\psi) = M g e \sin \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Integriert man dies zwischen den Grenzen

$$\chi = 0, \quad \psi = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \text{ und}$$

$$\chi, \quad \psi, \quad \vartheta, \text{ so wird}$$

$$6) \quad J_2 (\chi^2 + \psi^2) = 2 M g e (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta).$$

In Bezug auf die drei Koordinatenachsen, welche im Zeitpunkt t mit den Hauptachsen zusammenfallen (vergl. S. 212), ist die Momentensumme der Bewegungsgrößen bezw.

$$J_1 \varphi = J_1 \varphi_0; \quad J_2 \cdot \chi; \quad J_2 \cdot \psi.$$

Projiciren wir diese Strecken auf die Lothrechte AV , so ist die Summe dieser Projektionen die Momentensumme der Bewegungsgrößen in Bezug auf AV . Dies giebt

$$J_1 \varphi_0 \cdot \cos \vartheta + J_2 \psi \cdot \sin \vartheta.$$

Dieser Werth muss, weil $M \cdot g \parallel AV$, d. h. das Kraftmoment in Bezug auf AV Null ist, nach S. 193 unveränderlich, also gleich seinem Anfangswerthe sein. Sonach wird

$$J_1 \varphi_0 \cos \vartheta + J_2 \psi \cdot \sin \vartheta = J_1 \varphi_0 \cos \vartheta_0, \quad \text{oder}$$

$$7) \quad J_1 \varphi_0 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) = J_2 \psi \cdot \sin \vartheta.$$

Aus den Gl. 6 und 7 lässt sich ψ entfernen und χ berechnen, nämlich

$$8) \quad \chi = \pm \frac{1}{\sqrt{J_2}} \sqrt{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \left(2 M g e - \frac{J_1^2 \varphi_0^2 \cdot \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{J_2 \sin^2 \vartheta} \right)}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist ϑ die einzige Veränderliche. Da nun χ nicht imaginär werden kann, wird sich ϑ nur innerhalb solcher Werthe ändern können, für welche der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv bleibt; diejenigen Werthe von ϑ , welche jenen zu Null machen, sind Grenzwerte. Einer dieser Grenzwerte ist nach Gl. 8 offenbar der Anfangswerth $\vartheta = \vartheta_0$. Ein anderer Grenzwert ϑ_1 ergibt sich, wenn man

$$2 M \cdot g \cdot e - \frac{J_1^2}{J_2} \varphi_0^2 \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_1} = 0$$

setzt, wofür man wegen $\sin^2 \vartheta_1 = 1 - \cos^2 \vartheta_1$ auch schreiben kann:

$$9) \quad \frac{2 M \cdot g \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} (1 - \cos^2 \vartheta_1) = \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1.$$

Der Einfachheit wegen sollen im Weiteren nur solche Fälle berücksichtigt werden, in denen die anfängliche Winkelgeschwindigkeit φ_0 sehr gross oder, bestimmter ausgedrückt, das ursprüngliche Arbeitsvermögen $\frac{J_1 \varphi_0^2}{2}$ sehr gross im Vergleiche mit $M g \cdot e \frac{J_2}{J_1}$ ist; dann wird die linke Seite der Gl. 9 sehr klein, mithin auch die rechte; d. h. die Grenzwerte ϑ_0 und ϑ_1 sind nur wenig von einander verschieden, oder ϑ ändert sich nur wenig.

Wir schreiben daher

$$10) \quad \vartheta = \vartheta_0 + \delta,$$

worin für grosse Drehgeschwindigkeit des Kreisels δ ein kleiner Winkel ist. Hiermit wird

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos(\vartheta_0 + \delta) = \cos \vartheta_0 \cdot \cos \delta - \sin \vartheta_0 \cdot \sin \delta \\ &= \cos \vartheta_0 - \delta \cdot \sin \vartheta_0 \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$11) \quad \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta = \delta \cdot \sin \vartheta_0.$$

Vertauscht man noch annäherungsweise $\sin \vartheta$ mit dem Anfangswerth $\sin \vartheta_0$, so wird aus Gl. 8 unter Benutzung von Gl. 11:

$$12) \quad \chi = \pm \sqrt{2 \frac{Mg}{J_2} \cdot e \cdot \delta \cdot \sin \vartheta_0 - \frac{J_1^2}{J_2^2} \varphi_0^2 \delta^2}.$$

Nach Gl. 5 und 10 ist

$$13) \quad \chi = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\delta}{dt}.$$

Der grösste Werth δ_1 von δ ergibt sich für $\frac{d\delta}{dt} = 0$, also für $\chi = 0$ nach Gl. 12 zu

$$14) \quad \delta_1 = \frac{2 Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} \sin \vartheta_0 = \vartheta_1 - \vartheta_0.$$

Um zu erfahren, innerhalb welcher Zeit ϑ von ϑ_0 in ϑ_1 , also δ von 0 in δ_1 übergeht, muss man aus Gl. 13 und 12

$$dt = \frac{d\delta}{\chi} = \frac{d\delta}{\frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \sqrt{2 \frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} \delta - \delta^2}}$$

entnehmen und integrieren. Setzt man zur Abkürzung vorübergehend

$$\frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} = a, \quad \text{so wird}$$

$$dt = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \frac{d\delta}{\sqrt{2 a \delta - \delta^2}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} d \arccos \left(1 - \frac{\delta}{a} \right) &= - \frac{d \left(1 - \frac{\delta}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta}{a} \right)^2}} \\ &= \frac{1}{a} \frac{d\delta}{\sqrt{2 \frac{\delta}{a} - \frac{\delta^2}{a^2}}} = \frac{d\delta}{\sqrt{2a\delta - \delta^2}}, \text{ also} \end{aligned}$$

$$t = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos \left(1 - \frac{\delta}{a} \right) + C, \text{ oder}$$

$$15) \quad t = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos \left(1 - \frac{J_1^2 \varphi_0^2}{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0} \cdot \delta \right) + C.$$

Rechnet man die Zeit von dem Augenblick an, in welchem $\delta = 0$ also $\vartheta = \vartheta_0$ war, so wird

$$0 = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos 1 + C, \text{ d. h. } C = 0.$$

Löst man Gl. 15, mit $C = 0$, nach δ auf, so entsteht

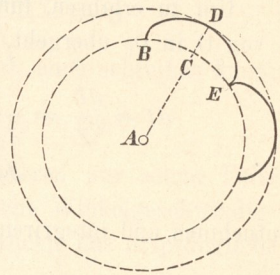
$$16) \quad \delta = \frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} \left(1 - \cos \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot t \right).$$

Diese Gleichung giebt δ als $f(t)$; jedes Mal wenn $\frac{J_1}{J_2} \varphi_0 t$ sich um 2π geändert hat, kehren für δ dieselben Werthe wieder; in der Zeit

$$17) \quad t_1 = \frac{2\pi J_2}{\varphi_0 J_1}$$

wird also der Zwischenraum von ϑ_0 bis ϑ_1 ein Mal hin und her durchlaufen. Die Achse AX des Kreisels beschreibt also um die Lothrechte AV einen Kegel mit einer nach Fig. 172 geformten Leitlinie. — Fig. 172 sei der Grundriss der Bahnlinie des Kreiselschwerpunktes S . Die Größe des Ausschlages CD in radialer Richtung ist durch δ_1 (Gl. 14) gegeben, die Zeit zum Durchlaufen eines Bogens BDE durch Gl. 17. Um auch noch die Länge BCE eines Bogens zu finden, müssen wir die Winkelgeschwindigkeit ω berechnen, mit der sich die Ebene VAX (Fig. 171)

Fig. 172.



um AV dreht. Diese erhält man, indem man die Winkelgeschwindigkeit ψ um die Achse AZ zerlegt nach den Richtungen AV und AX (Fig. 173), dann ist die in erstere Richtung fallende Seitengeschwindigkeit der gesuchte Werth

$$\omega = \frac{\psi}{\sin \vartheta}.$$

Nun ist nach Gl. 7:

$$\psi = \frac{J_1}{J_2} \cdot \varphi_0 \frac{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}{\sin \vartheta},$$

also mittels Gl. 11, wenn man zugleich nach S. 219 wieder $\sin \vartheta$ mit $\sin \vartheta_0$ vertauscht,

$$\psi = \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot \delta, \quad \text{mithin}$$

$$18) \quad \omega = \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot \frac{\delta}{\sin \vartheta_0}.$$

Da nun δ von Null bis δ_1 schwankt, so ist auch ω zwischen Null und einem Grösstwerthe (für $\delta = \delta_1$) veränderlich. Einen Mittelwerth von ω erhält man, wenn man für δ den Mittelwerth

$$\frac{\delta_1}{2} = \frac{Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} \sin \vartheta_0$$

(Gl. 14) einsetzt, nämlich

$$19) \quad \omega = \frac{Mg \cdot e}{J_1 \varphi_0}.$$

In der Zeit
$$t_1 = \frac{2\pi J_2}{\varphi_0 J_1}$$

(Gl. 17) dreht sich die Ebene VAX also um den Winkel

$$\eta = \omega \cdot t_1 = 2\pi \frac{Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2},$$

wofür man nach Gl. 14 kürzer

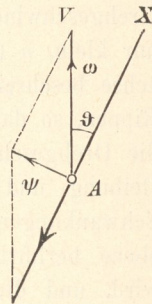
$$20) \quad \eta = \pi \frac{\delta_1}{\sin \vartheta_0}$$

schreiben kann. Auf eine Umdrehung der Ebene VAX kommen sonach

$$21) \quad n = \frac{2\pi}{\eta} = 2 \frac{\sin \vartheta_0}{\delta_1}$$

Schwankungen der Kreiselachse.

Fig. 173.



Die Zeit einer vollständigen Drehung der Ebene VAX beträgt

$$22) \quad t_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{J_1 \cdot \varphi_0}{Mg \cdot e},$$

wächst also verhältnissgleich mit der Winkelgeschwindigkeit φ_0 des Kreisels und ist unabhängig von dem Winkel ϑ_0 . Bei sehr grosser Drehgeschwindigkeit φ_0 des Kreisels ist nach Gl. 14 der Winkel δ_1 nur klein, n (Gl. 21) gross und t_2 (Gl. 22) gross, d. h. die Kreiselsachse beschreibt sehr langsam einen Kegel mit vielen aber kleinen Rippen, so dass der Kegel fast wie ein Kreiskegel erscheint. Wird die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um seine Achse in Folge von Reibung und Luftwiderstand allmählich kleiner, so werden die Schwankungen δ_1 grösser, bis der Kreisel schliesslich die Grundebene berührt und umfällt oder sonst in seiner Bewegung gestört wird, und die Zeit t_2 einer Drehung der Ebene VAX verkleinert sich. Der Sinn der Winkelgeschwindigkeiten ω und φ_0 (Gl. 19) stimmt in Bezug auf den Drehpunkt überein; ist φ_0 , von oben betrachtet, rechts drehend, so gilt dies auch für ω , und umgekehrt.

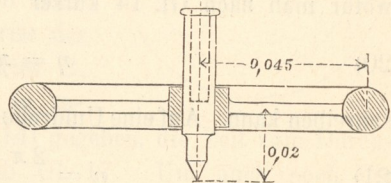
Über die Form der Kurve BDE (Fig. 172) erhält man noch bestimmteren Aufschluss, wenn man mittels der Gl. 12 und 18 bildet

$$\frac{\chi^2}{\omega^2} = \frac{2Mg \cdot e \cdot \sin^3 \vartheta_0 \cdot J_2}{J_1^2 \varphi_0^2 \delta} - \sin^2 \vartheta_0.$$

Für $\delta = 0$ wird $\frac{\chi^2}{\omega^2} = \infty$, d. h. die Kurve BDE ist bei B und E radial; für $\delta = \delta_1$ (Gl. 14) aber wird $\frac{\chi^2}{\omega^2} = 0$, d. h. die Kurve BDE ist bei D rechtwinklig zu AD . Weil $AC = e \cdot \sin \vartheta_0$, so ist $BCE = AC \cdot \eta = e \cdot \delta_1 \cdot \pi$ (Gl. 20). Betrachtet man annähernd CD als $= e \cdot \delta_1$, so passt auch das Verhältnis $BCE : CD = \pi$ auf eine sphärische Epicykloide, welche beim Rollen eines spitzen Kegels auf dem äusseren Mantel eines stumpferen entstehen würde.

Beispiel: Ein Kreisel (Fig. 173) bestehe aus einem Schwungringe von 0,045 m mittlerem Halbmesser, der so schwer ist, dass gegen seine Masse diejenige der Achse und der Radarme vernachlässigt werden kann. Die Spitze liege um 0,02 m unter der Mitte

Fig. 174.



des Schwungringes und sei in einem glatten Grübchen drehbar, so dass man ihre Bewegung als Drehung in einem Kugellager ansehen kann. Dann ist annähernd

$$J_1 = M \cdot 0,045^2 = 0,002 \cdot M,$$

$$J_2 = M \left(\frac{0,045^2}{2} + 0,02^2 \right) = 0,0014 \cdot M,$$

$$e = 0,02.$$

Für diesen Kreisel ist die Schwankung

$$(Gl. 14) \quad \delta_1 = \frac{2 M \cdot 9,81 \cdot 0,02 \cdot 0,0014 M \cdot \sin \vartheta_0}{\varphi_0^2 \cdot 0,002^2 \cdot M^2} = 137 \frac{\sin \vartheta_0}{\varphi_0^2};$$

die Zeit einer Hin- und Herschwankung

$$(Gl. 17) \quad \tau_1 = 2 \pi \frac{0,0014}{0,002 \cdot \varphi_0} = \frac{4,4}{\varphi_0};$$

die Zeit eines Umlaufes der Kreiselachse um die Lothrechte

$$(Gl. 22) \quad t_2 = 2 \pi \frac{0,002}{9,81 \cdot 0,02} \varphi_0 = 0,064 \varphi_0;$$

die Zahl der Schwankungen der Achse während eines Umlaufes, d. h. Zahl der Rippen des Kegels

$$(Gl. 21) \quad n = 2 \frac{\sin \vartheta_0}{137 \cdot \sin \vartheta_0} \cdot \varphi_0^2 = 0,015 \cdot \varphi_0^2.$$

Um die Achse des Kreisels sei eine Schnur gewickelt; die Mitte derselben sei von der Mittellinie der Achse um 4 mm entfernt, so dass eine Umwicklung einer Fadenlänge von rund 25 mm entspricht. Wird an dem freien Ende des Fadens mit möglichst gleich bleibender Kraft gezogen und zugleich die (hohle) Achse des Kreisels mittels eines hineingesteckten Stiftes festgehalten, so erfährt der Kreisel eine gleichförmig beschleunigte Drehbewegung. Werden bei dieser in einer Zeit von drei Sekunden 800 mm Fadenlänge abgezogen, so ist die Endgeschwindigkeit des Fadens (nach I. Theil, S. 12, Gl. 4, mit $c=0$)

$$v = \frac{2 \cdot 800}{3} = 533 \text{ mm/s.},$$

entsprechend einer Drehgeschwindigkeit von

$$\frac{533}{25} = 21$$

Umdrehungen in der Sekunde, oder einer Winkelgeschwindigkeit

$$\varphi_0 = 21 \cdot 2 \pi = 132.$$

Die Winkelbeschleunigung dieser Antriebbewegung ist

$$\varepsilon = \frac{\varphi_0}{t} = \frac{132}{3} = 44.$$

Hat der Kreisel ein Gewicht $Mg = 0,3 \text{ kg}$, so ist

$$J_1 = \frac{0,3}{9,81} \cdot 0,002;$$

somit erfordert ε ein Moment

$$\mathfrak{M} = \varepsilon \cdot J_1 = 0,0027 \text{ mkg},$$

also an einem Hebelarme von $0,004 \text{ m}$ eine Zugkraft $K = 0,7 \text{ kg}$.

Aus $\varphi_0 = 132$ folgt die Zeit einer Hin- und Herschwankung

$$t_1 = \frac{4,4}{132} = 0,033 \text{ s};$$

die Zeit eines Umlaufes der Kreiselachse $t_2 = 0,064 \cdot 132 = 8,4 \text{ s}$; die Zahl der Rippen eines Kegels $n = 0,015 \cdot 132^2 = 261,4$. Einer Schrägstellung der Kreiselachse um den Winkel $\vartheta_0 = 10^\circ$ mit $\sin \vartheta_0 = 0,17$ entspricht dann

$$\delta_1 = \frac{137 \cdot 0,17}{132^2} = 0,0014 = 5'.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit φ_0 nur halb so gross, wie vorstehend angenommen, so wird t_1 doppelt so gross, d. h. $0,066 \text{ s}$; t_2 halb so gross, d. h. $4,2 \text{ s}$; die Zahl n der Rippen vermindert sich auf ein Viertel, d. h. auf $65,4$; während δ_1 auf das Vierfache, nämlich auf $20'$ zunimmt.

9. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung bewegender Kräfte.

Der vorstehend behandelte Fall der Kreiselbewegung wurde dadurch verhältnismässig leicht lösbar, dass das Trägheits-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid war, dass ausserdem die Winkelgeschwindigkeit φ_0 sehr gross, die anderen beiden χ_0 und ψ_0 aber gleich Null vorausgesetzt wurden und dass die Achse des resultierenden Kräftepaares in eine Hauptachse fiel. Ohne diese vereinfachenden Annahmen wird die Aufgabe, die Drehbewegung eines Körpers um einen festen Punkt zu untersuchen, meist so schwierig, dass wir von deren allgemeiner Behandlung hier absehen.

Wirken auf den Körper ausser dem Widerstande des festen Punktes keine äusseren Kräfte, sind also die Drehmomente in Bezug auf alle durch den festen Punkt zu legende Achsen gleich Null, so nehmen die Euler'schen Drehgleichungen (S. 215/6) allerdings die etwas einfachere Gestalt

$$J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = (J_2 - J_3)\chi \cdot \psi, \quad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} = (J_3 - J_1)\psi \cdot \varphi,$$

$$J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} = (J_1 - J_2)\varphi \cdot \chi \quad \text{an.}$$

Die Entwicklung dieser Gleichungen, welche Poinsoot im Jahre 1834 gezeigt hat, soll hier nur in ihren Ergebnissen beschrieben werden.