

Dann nimmt V wieder zu, und für $\vartheta = 90^\circ$ wird

$$V = Mg \left(1 - \frac{e^2}{i^2} \right).$$

Der in vorstehenden Gleichungen auftretende Werth $\frac{e^2}{i^2}$, gleichbedeutend mit $\frac{e}{l}$ (vergl. S. 208, Gl. 18), wenn l die Schwingungslänge des am unteren Ende A aufgehängten Stabes ist, richtet sich nach der Massenvertheilung des Stabes. Ist die Masse gleichmässig über die Länge a vertheilt, so ist

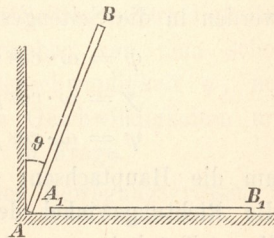
$$e = \frac{a}{2}, \quad i^2 = \frac{a^2}{3}, \quad l = \frac{2}{3}a, \quad \text{daher} \quad \frac{e^2}{i^2} = \frac{e}{l} = \frac{3}{4},$$

womit man für H und V leicht bestimmtere Ausdrücke aus vorstehenden Gleichungen erhält. Dieselben Werthe gelten offenbar für eine rechteckige, lothrecht aufgestellte, um die Unterkante drehbare Platte von gleichmässiger Gewichtsvertheilung.

Ist die Anordnung so getroffen, dass durch einen Vorsprung oder eine lothrechte Wand wohl ein Ausgleiten des unteren Endes nach links, nicht aber nach rechts verhindert wird (Fig. 164), so gelten die vorstehend entwickelten

Gleichungen nur bis zu dem Drehungswinkel $\vartheta = 48^\circ$ und vermöge des in Wirklichkeit meist auftretenden Reibungswiderstandes noch um ein gewisses Mafz darüber hinaus. Bei weiterer Annäherung des Körpers an den wagerechten Boden kann die erforderliche, jetzt negative, d. h. nach links gerichtete Kraft H durch die Reibung nicht mehr geliefert werden, und es findet nun ein Ausgleiten des unteren Endes der Stange nach rechts hin wirklich statt, so dass der umgefallene Körper sich schliesslich in einer Lage A_1B_1 auf dem Boden findet. Weiteres s. S. 233.

Fig. 164.



7. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Ein Körper drehe sich unter Einwirkung äusserer Kräfte um einen festen Punkt A , dann lässt sich nach S. 23 seine Bewegung

in jedem Zeitpunkte zurückführen auf die Drehung um eine durch den Punkt A gehende augenblickliche Drehachse AP . Es wird nun

1. der Körper seine Lage im Raume ändern;
2. die augenblickliche Drehachse ihre Lage sowohl im Raume wie auch gegen den Körper ändern;
3. wird auch die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω eine Grössenänderung erfahren.

Die drei Hauptachsen des Körpers für den Punkt A seien bekannt; dieselben liegen gegen den Körper fest, werden daher ihre Richtung im Raum ändern.

Wir denken uns durch den festen Punkt A (Fig. 165) drei feste Achsen gelegt, die so gewählt sind, dass sie im Zeitpunkte t mit den Hauptachsen zusammenfallen. Die diesem Zeitpunkte entsprechende Winkelgeschwindigkeit ω kann nach S. 35 (genau wie eine Kraft) zerlegt werden in die Seitengeschwindigkeiten

$$\varphi = \omega \cdot \cos \alpha;$$

$$\chi = \omega \cdot \cos \beta;$$

$$\psi = \omega \cdot \cos \gamma$$

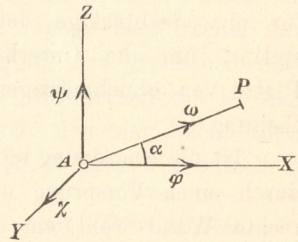
um die Hauptachsen; α, β, γ seien

die Richtungswinkel der AP ; ferner seien J_1, J_2, J_3 die drei Haupt-Trägheitsmomente, $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ die Momentensummen der äusseren Kräfte in Bezug auf die Hauptachsen.

Um die Beziehung zwischen der Drehbewegung um den festen Punkt A und den äusseren Kräften zu erhalten, wendet man den Satz von der Momentensumme der Bewegungsgrössen an. Daher bestimmen wir diese Momentensummen zunächst für den Zeitpunkte t , sodann für den Zeitpunkte $t + dt$ und setzen die auf die Zeiteinheit bezogenen Zunahmen dieser Grössen gleich den entsprechenden Kraftmomenten.

Um die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die x -Achse zu finden, bedenke man, dass ein Massenpunkt m (Fig. 166) mit den Koordinaten x, y, z und einem Abstand r_1 von der x -Achse wegen der Winkelgeschwindigkeit φ um die x -Achse eine Geschwindigkeit $\varphi \cdot r_1$ mit dem Hebelarme r_1 , also ein Moment der Bewegungsgrösse $m \cdot \varphi \cdot r_1^2$ hat. Ist r_2 der rechtwinklige

Fig. 165.



Abstand des Massenpunktes von der y -Achse (Fig. 167), so entspricht der Winkelgeschwindigkeit χ um die y -Achse eine Geschwindigkeit $\chi \cdot r_2$, welche sich leicht in $\chi \cdot z$ und $-\chi \cdot x$ im Sinne der x - bzw. z -Achse zerlegen lässt. Ebenso erhält man wegen der Winkelgeschwindigkeit ψ um die z -Achse die Seitengeschwindigkeiten

Fig. 166.

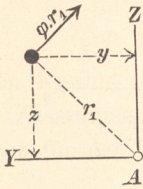


Fig. 167.

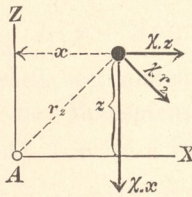
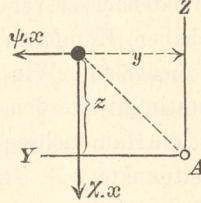


Fig. 168.



$-\psi \cdot y$ und $+\psi \cdot x$ im Sinne der x - bzw. der y -Achse. Zu dem Momente der Bewegungsgröße in Bezug auf die x -Achse liefern die parallel der x -Achse gerichteten Seitengeschwindigkeiten keinen Beitrag; es kommen daher, abgesehen von dem schon erledigten Beitrage $m\varphi \cdot r_1^2$ der Winkelgeschwindigkeit φ , nur noch die beiden in Fig. 168 angegebenen Geschwindigkeiten mit den Momenten $-\chi \cdot x \cdot y$ und $-\psi \cdot x \cdot z$ in Frage.

Sonach wird die Momentensumme der Bewegungsgrößen in Bezug auf die x -Achse im Zeitpunkte t :

$$\Sigma(m\varphi \cdot r_1^2) - \Sigma(m \cdot \chi \cdot x \cdot y) - \Sigma(m \cdot \psi \cdot x \cdot z).$$

Da nun die Winkelgeschwindigkeiten φ , χ , ψ für diese Summen konstante Faktoren sind und da $\Sigma(m \cdot r_1^2)$ das Trägheitsmoment J_1 bedeutet, so wird obige Momentensumme

$$J_1 \cdot \varphi - \chi \Sigma m x y - \psi \Sigma m x z.$$

Weil aber in Bezug auf die Hauptachsen die Centrifugalmomente gleich Null sind, so vereinfacht sich obige Momentensumme zu

$$J_1 \cdot \varphi.$$

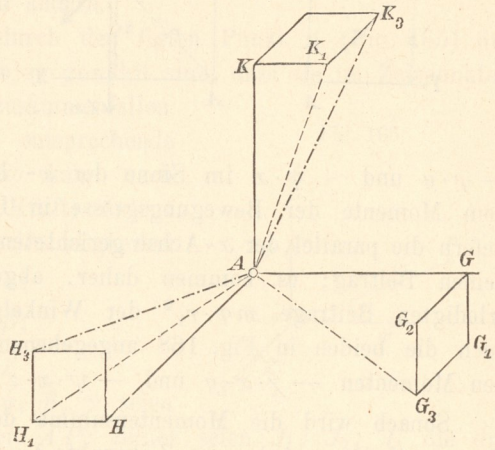
Ebenso werden für den Zeitpunkt t die Momentensummen der Bewegungsgrößen in Bezug auf die anderen beiden Achsen

$$J_2 \cdot \chi \quad \text{und} \quad J_3 \cdot \psi.$$

Zur Ermittlung der entsprechenden Momentensummen für den Zeitpunkt $t + dt$ darf man nun nicht etwa in dem Ausdruck $J_1 \cdot \varphi$

einfach φ mit $\varphi + d\varphi$ vertauschen. Wohl ist $J_1(\varphi + d\varphi)$ die Momentensumme der Bewegungsgrößen in Bezug auf die erste Hauptachse; jedoch ist zu bedenken, dass der hier in Frage kommende Satz in Bezug auf Achsen unveränderlicher Richtung, z. B. die festen Koordinatenachsen, gilt, dass die Hauptachsen des Körpers sich aber während der Zeit dt um gewisse, wenn auch unendlich kleine, Winkel gegen ihre ursprüngliche Richtung, d. h. gegen die festen Koordinatenachsen, verdreht haben. Es müssen daher zunächst die Winkel bestimmt werden, welche die Hauptachsen im Zeitpunkte $t + dt$ mit der x -Achse einschliessen.

Zu dem Ende denken wir uns auf den Hauptachsen, welche im Zeitpunkte t noch mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, die Längen $AG = AH = AK = 1$ abgetragen (Fig. 169).



Vermöge der Winkelgeschwindigkeit χ um die AY bewegt sich G nach G_1 um $GG_1 = \chi \cdot dt$. Vermöge der Winkelgeschwindigkeit ψ um die AZ bewegt sich G um $GG_2 = \psi \cdot dt$. Die Folge beider Geschwindigkeiten ist eine Verrückung des Punktes G nach G_3 , d. h. eine Verdrehung der ersten Hauptachse um den Winkel

$$GAG_3 = dt\sqrt{\chi^2 + \psi^2}.$$

Die zweite Hauptachse schliesst Anfangs mit der x -Achse den Winkel $\frac{\pi}{2}$ ein. Dieser Winkel wird nicht geändert durch die Drehung um AX und um AY , sondern nur durch die Drehung um AZ , so dass im Zeitpunkte $t + dt$ die zweite Hauptachse mit der x -Achse den Winkel $H_3AG = \frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt$ einschliesst.

Der Winkel der dritten Hauptachse gegen AX wird nur durch die Winkelgeschwindigkeit χ verändert und geht in

$$K_3 AG = \frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt$$

über. Multiplicirt man die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die drei Hauptachsen für den Zeitpunkt $t + dt$, also

$$J_1(\varphi + d\varphi), \quad J_2(\chi + d\chi), \quad J_3(\psi + d\psi),$$

mit den Kosinus der soeben bestimmten Winkel, so bekommt man durch Zusammenzählen die Momentensumme in Bezug auf die x -Achse für den Zeitpunkt $t + dt$. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} J_1(\varphi + d\varphi) \cdot \cos(dt\sqrt{\chi^2 + \psi^2}) \\ + J_2(\chi + d\chi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt\right) \\ + J_3(\psi + d\psi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt\right). \end{aligned}$$

Weil aber $\cos(dt \cdot \sqrt{\chi^2 + \psi^2}) = 1,$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt\right) = -\sin(\psi \cdot dt) = -\psi \cdot dt,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt\right) = \sin(\chi \cdot dt) = \chi \cdot dt$$

ist, so entsteht

$$J_1(\varphi + d\varphi) - J_2(\chi + d\chi)\psi \cdot dt + J_3(\psi + d\psi) \cdot \chi \cdot dt.$$

Zieht man hiervon ab die anfängliche Momentensumme $J_1\varphi_1$, vernachlässigt die Unendlichkleinen zweiter Ordnung und theilt schliesslich durch dt , so ergibt sich

$$J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - J_2 \cdot \chi \cdot \psi + J_3 \cdot \chi \cdot \psi$$

als Zunahme der Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die x -Achse für die Zeiteinheit, welche nach S. 193 gleich der Momentensumme \mathfrak{M}_x der äusseren Kräfte ist. Somit hat man die Gleichung

$$1) \quad J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - (J_2 - J_3)\chi \cdot \psi = \mathfrak{M}_x.$$

Ebenso folgt für die anderen Achsen

$$2) \quad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} - (J_3 - J_1) \psi \cdot \varphi = \mathfrak{M}_y,$$

$$3) \quad J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2) \cdot \varphi \cdot \chi = \mathfrak{M}_z.$$

Dies sind die von Leonhard Euler im Jahre 1758 entwickelten Gleichungen für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

8. Bewegung des Kreisels.

Unter einem Kreisel denken wir uns einen Körper, bestehend aus einer Achse mit einem darauf befestigten Schwungringe. Dem Körper werde eine bedeutende Winkelgeschwindigkeit φ_0 um seine zunächst festgehaltene Achse ertheilt; setzt man ihn dann in beliebig schiefer Lage mit dem unteren Ende A der Achse in ein Kugellager, welches den Punkt A (nahezu) unbeweglich macht, oder befand er sich schon, bevor er in Drehung versetzt wurde, in einem solchen (Fig. 170), so fällt der Kreisel unter Einwirkung der Schwere nicht etwa um, wie es ohne die Drehung geschehen würde, vielmehr beschreibt die geometrische Achse des Kreisels bekanntlich eine Kegelfläche, deren Achse die durch A gelegte Lothrechte ist, wobei aber die Leitlinie nicht ein Kreis, sondern eine von zwei concentrischen Kreisen eingeschlossene, epicykloidenartige Kurve ist. Dies ergibt sich wie folgt:

Die geometrische Achse ist offenbar eine Hauptachse des Kreisels für den Punkt A und werde zur x -Achse genommen. Jede durch A rechtwinklig zur x -Achse gelegte Gerade ist ebenfalls eine Hauptachse. Wählt man die durch AX bestimmte lothrechte Ebene zur xz -Ebene, so liegen hierdurch die Achsen AZ und AY fest; letztere ist in Fig. 171 rechtwinklig zur Bildebene zu denken. Die Lothrechte durch den Punkt A werde

Fig. 170.

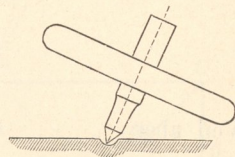


Fig. 171.

