

Ebenso wird

$$13) \quad J_y = \frac{M}{5}(a^2 + c^2); \quad J_x = \frac{M}{5}(b^2 + c^2).$$

Für die Kugel wird mit  $b = c = a$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}Ma^2 \quad (\text{s. 1. Theil, S. 273}).$$

#### 4. Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Bei einem starren Körper ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse unveränderlich, daher wird aus Gl. 6, S. 193

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Hierin ist  $\frac{d\omega}{dt}$  die Winkelbeschleunigung; bezeichnet man dieselbe mit  $\varepsilon$ , so hat man die aus 1. Theil, S. 276 bekannte Gleichung für die ungleichförmige Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse

$$1) \quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn  $\mathfrak{M}$  die Momentensumme der äusseren Kräfte,  $J$  das Trägheitsmoment des Körpers, beide bezogen auf die Drehachse, bedeuten.

Auch kann man, wenn für irgend einen Zeitraum  $\omega_1$  den Anfangswerth,  $\omega$  den Endwerth der Winkelgeschwindigkeit,  $\mathfrak{A}_k$  die Arbeit der äusseren Kräfte bedeutet, nach dem Satze der Arbeit schreiben (s. 1. Theil, S. 267)

$$2) \quad (\omega^2 - \omega_1^2) \frac{J}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Die Berechnung der Widerstände, welche an der Drehachse eines Körpers angreifen müssen, um sie unbeweglich zu erhalten, ist auch schon im 1. Theile, S. 287 allgemein gezeigt worden. Hier sollen noch einige Beispiele dieser Art durchgeführt werden.

#### 5. Widerstände der Achse einer schwingenden Glocke.

Die an der Achse einer Thurmglöcke auftretenden Kräfte sind von besonderer Wichtigkeit, da sie nicht nur die Abmessungen

des sog. Glockenstuhles, sondern, wegen der hohen Lage des letzteren, häufig auch die Standsicherheit des Thurmes bedingen. Die zur wagerechten Drehachse ( $x$ -Achse) der Glocke rechtwinklige  $yz$ -Ebene durch den Schwerpunkt  $S$  ist eine Symmetrieebene (Fig. 160); daher muss in ihr auch der Gesamt-widerstand der Drehachse liegen und sich in zwei Hälften auf die symmetrisch angeordneten beiden Drehzapfen vertheilen. Aus diesem Grunde kommen bei dieser Aufgabe nur die Projektionen der Kräfte auf die  $yz$ -Ebene in Frage, wodurch die Untersuchung so vereinfacht wird, dass wir nicht auf die allgemeinen Gleichungen (1. Theil, S. 288) zurückgreifen, sondern die Aufgabe unmittelbar behandeln wollen.

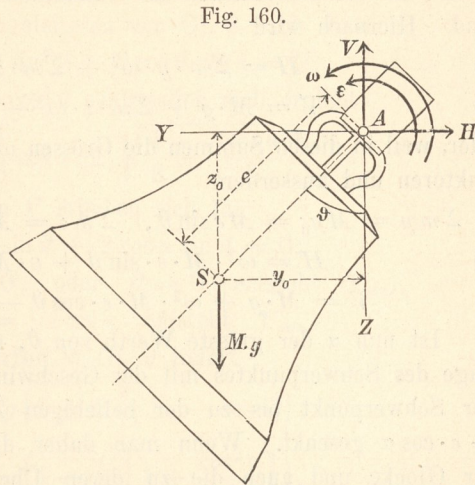


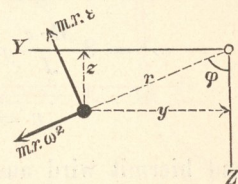
Fig. 160.

In einem beliebigen Zeitpunkte  $t$  weiche der Drehungshalbmesser  $AS = e$  des Schwerpunktes um den Winkel  $\vartheta$  von der Lothrechten ab, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung seien  $\omega$  und  $\varepsilon$ , die Koordinaten des Schwerpunktes

1)  $y_0 = e \cdot \sin \vartheta$ ;  $z_0 = e \cdot \cos \vartheta$ .

Einem Massentheilchen  $m$  der Glocke im Abstand  $r$  von der Drehachse und mit den Koordinaten

Fig. 161.



$$y = r \sin \varphi; \quad z = r \cos \varphi$$

(Fig. 161) entsprechen nach 1. Theil, S. 277 die Ergänzungskräfte  $m \cdot r \cdot \omega^2$  und  $m \cdot r \cdot \varepsilon$ , welche in den Richtungen der positiven  $y$ - und  $z$ -Achse zusammen die Seitenkräfte liefern

$$m \cdot r \cdot \omega^2 \sin \varphi + m \cdot r \cdot \varepsilon \cos \varphi = m \cdot y \cdot \omega^2 + m \cdot z \cdot \varepsilon \quad \text{und}$$

$$m \cdot r \cdot \omega^2 \cos \varphi - m \cdot r \cdot \varepsilon \sin \varphi = m \cdot z \cdot \omega^2 - m \cdot y \cdot \varepsilon.$$

Die wirklichen äusseren Kräfte  $H$ ,  $V$  und  $Mg$  (Fig. 160) müssen nun nach dem Satze d'Alembert's (s. 1. Theil, S. 139) der Gesammtheit der Ergänzungskräfte das Gleichgewicht halten, wenn  $V$  und  $H$  die Seitenkräfte des Gesamtwiderstandes der Drehachse sind. Hiernach wird

$$2) \quad H = \Sigma m \cdot y \cdot \omega^2 + \Sigma m \cdot z \cdot \varepsilon \quad \text{und}$$

$$3) \quad V = M \cdot g + \Sigma m \cdot z \cdot \omega^2 - \Sigma m \cdot y \cdot \varepsilon,$$

oder, weil in diesen Summen die Grössen  $\omega^2$  und  $\varepsilon$  gemeinschaftliche Faktoren und ausserdem

$$\Sigma m y = M y_0 = M e \sin \vartheta, \quad \Sigma m z = M z_0 = M e \cos \vartheta \quad \text{sind,}$$

$$4) \quad H = \omega^2 \cdot M \cdot e \cdot \sin \vartheta + \varepsilon \cdot M \cdot e \cdot \cos \vartheta,$$

$$5) \quad V = M \cdot g + \omega^2 \cdot M \cdot e \cdot \cos \vartheta - \varepsilon \cdot M \cdot e \cdot \sin \vartheta.$$

Ist nun  $\alpha$  der grösste Werth von  $\vartheta$ , entsprechend der höchsten Lage des Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit Null, so hat sich der Schwerpunkt bis zu der beliebigen Zwischenlage um  $e \cdot \cos \vartheta - e \cdot \cos \alpha$  gesenkt. Wenn man daher die Bewegungswiderstände der Glocke und auch die zu deren Überwindung aufzuwendende Triebkraft vernachlässigt, so ist nach dem Satze der Arbeit (S. 204)

$$6) \quad \omega^2 \frac{J}{2} = M \cdot g \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha)$$

und die Winkelbeschleunigung

$$7) \quad \varepsilon = \frac{M \cdot g \cdot y_0}{J} = \frac{M \cdot g \cdot e \cdot \sin \vartheta}{J}.$$

Führt man noch mit  $J = M \cdot i^2$  den Trägheitshalbmesser  $i$  der Glocke ein, so ergibt sich

$$\omega^2 = 2 \frac{M \cdot e}{J} g (\cos \vartheta - \cos \alpha) = \frac{2 e g}{i^2} (\cos \vartheta - \cos \alpha),$$

$$\varepsilon = \frac{M \cdot e}{J} \cdot g \cdot \sin \vartheta = \frac{e \cdot g}{i^2} \sin \vartheta,$$

und hiermit wird aus den Gl. 4 und 5

$$8) \quad H = Mg \frac{e^2}{i^2} (3 \sin \vartheta \cos \vartheta - 2 \cos \alpha \sin \vartheta),$$

$$9) \quad V = Mg \left( 1 + \frac{e^2}{i^2} [3 \cos^2 \vartheta - 2 \cos \alpha \cos \vartheta - 1] \right).$$

Die Grösse des wagerechten Widerstandes  $H$  wird zu Null für  $\vartheta = 0$ , d. h. für die tiefste Stellung der Glocke und für

$\cos \vartheta = \frac{2}{3} \cos \alpha$ , was nur bei  $\alpha > 90^\circ$  Sinn hat.  $H$  wechselt selbstverständlich sein Vorzeichen übereinstimmend mit  $\vartheta$ , ist also bald nach rechts, bald nach links gerichtet. Wichtig ist die Kenntnis des Grösstwerthes von  $H$ ; diesen findet man leicht durch Nullsetzung der ersten Abgeleiteten von Gl. 8 nach  $\vartheta$ , d. h.

$$3 \cos^2 \vartheta - 3 \sin^2 \vartheta - 2 \cos \vartheta \cos \alpha = 0,$$

woraus mit  $\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta$  schliesslich sich ergibt:

$$10) \quad \cos \vartheta_1 = \frac{1}{6} \cos \alpha \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{\cos \alpha}{6}\right)^2}.$$

Die äussersten Werthe von  $V$  ergeben sich für

$$-6 \cos \vartheta \sin \vartheta + 2 \cos \alpha \sin \vartheta = 0;$$

d. h. für  $\sin \vartheta = 0$ , oder  $\vartheta = 0$  entsteht  $V_{max}$ ,

für  $\cos \vartheta = \frac{1}{3} \cos \alpha$  entsteht  $V_{min}$ .

Die Einsetzung dieser Werthe in Gl. 9 liefert

$$11) \quad V_{max} = Mg \left( 1 + 2 \frac{e^2}{i^2} [1 - \cos \alpha] \right),$$

$$12) \quad V_{min} = Mg \left( 1 - \frac{e^2}{i^2} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{3} \right] \right).$$

Für die Berechnung der Grösstwerthe von  $H$  und  $V$  ist besonders die Kenntnis der Grössen  $e$  und  $i$  erforderlich. Ist nun Fig. 162 der Querschnitt der Glocke und  $AX$  die Drehachse, so kann man sich die Glocke in sehr viele wagerechte Ringe zerlegt denken. Ein solcher Ring habe den inneren und äusseren Halbmesser  $x_1$  bzw.  $x_2$ , die Höhe  $dz$ , den Abstand  $z$  von der  $AX$ . Dann liefert dieser Ring zum statischen Momente  $\mathcal{S}$  den Beitrag

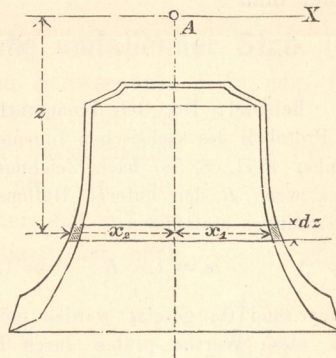
$$d\mathcal{S} = \frac{\gamma}{g} (x_2^2 - x_1^2) \pi \cdot dz \cdot z;$$

das statische Moment der metallenen Glocke ist also

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \pi \Sigma (x_2^2 - x_1^2) z \cdot dz$$

( $\gamma$  das Gewicht von 1 <sup>cbm</sup> Glockenmetall); dazu kommt noch das statische Moment des (gewöhnlich) hölzernen Helmes der Glocke,

Fig. 162.



welches sich bei gegebenen Abmessungen leicht berechnen lässt. Bezeichnet man dies mit  $\mathfrak{S}_h$ , so ist das ganze statische Moment der Glocke

$$13) \quad \mathfrak{S} = \frac{\gamma}{g} \pi \Sigma (x_2^2 - x_1^2) z \cdot dz + \mathfrak{S}_h.$$

$\mathfrak{S}_h$  wird übrigens  $< 0$ , da der Helm (Fig. 160) grösstentheils oberhalb der Achse  $AX$  liegt. Offenbar ist das Gewicht

$$Mg = \gamma \pi \Sigma (x_2^2 - x_1^2) dz + M_h \cdot g,$$

wenn  $M_h g$  das Gewicht des Helmes bedeutet. Dann findet sich leicht

$$14) \quad e = \frac{\mathfrak{S}}{M}.$$

Das polare Trägheitsmoment des Ringes ist

$$^{1/2} (x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz,$$

das Durchmesser-Trägheitsmoment mithin

$$^{1/4} (x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz$$

und dasjenige in Bezug auf die  $AX$ :

$$^{1/4} (x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz + (x_2^2 - x_1^2) \pi \cdot dz \cdot z^2. \text{ Daher wird}$$

$$15) \quad J_x = \frac{\gamma}{g} \cdot \pi \left\{ \Sigma \frac{1}{4} (x_2^4 - x_1^4) \cdot dz + \Sigma (x_2^2 - x_1^2) z^2 \cdot dz \right\} + J_h,$$

wenn  $J_h$  das Trägheitsmoment des Helmes bedeutet. Hiernach findet man

$$16) \quad i^2 = \frac{J_x}{M}.$$

**Beispiel:** Der Geh. Finanzrath Köpcke zu Dresden hat im Jahre 1871 (s. Protokoll des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins vom 18. November 1871, S. 58) nach Zeichnungen und ausgeführten Glocken ermittelt, dass, wenn  $R$  den unteren Halbmesser der Glocke bezeichnet, etwa folgende Beziehungen stattfinden:

$$17) \quad e = 1,225 R; \quad i^2 = 1,895 R^2; \quad \text{also} \quad \frac{e^2}{i^2} = 0,7919,$$

wofür rund 0,8 gesetzt werden möge. An einer vorhandenen Glocke lassen sich diese Werthe prüfen durch Beobachtung der Schwingungsdauer  $t$  und Herleitung der Schwingungslänge  $l$  aus dieser. Es ist nämlich für die Glocke als Pendel (nach 1. Theil, S. 279)

$$18) \quad l = \frac{J}{M \cdot e} = \frac{i^2}{e} = \frac{1,895}{1,225} R = 1,547 R;$$

dies muss  $= \frac{g t^2}{\pi^2}$  oder rund  $= t^2$  sein (weil  $g$  nahezu  $= \pi^2$  ist).

Nimmt man noch an, dass die Mittellinie der Glocke beim grössten Ausschlage sich um  $20^\circ$  über die Wagerechte erhebe, dass also  $\alpha = 110^\circ$  sei, so wird nach Gl. 10 mit  $\cos \alpha = -0,342$ :

$$\cos \vartheta_1 = -0,057 \pm \sqrt{0,5 + 0,057^2} = 0,652 \text{ und } -0,766.$$

Dem entsprechen  $\vartheta_1 = 49^\circ 18'$  mit  $\sin \vartheta_1 = 0,758$ , sowie  $\vartheta_1 = 130^\circ$ , welcher letztere Werth hier aber keine Bedeutung hat, da er wegen  $\alpha = 110^\circ$  nicht vorkommt. Mit  $\vartheta_1 = 49^\circ 18'$  wird dann aus Gl. 8:

$$H_{max} = Mg \cdot 0,8 (3 \cdot 0,758 \cdot 0,652 + 2 \cdot 0,342 \cdot 0,758) = 1,60 \cdot Mg.$$

Für  $\vartheta = 0$ , d. h. in der tiefsten Lage der Glocke entsteht (Gl. 11)

$$V_{max} = Mg \cdot (1 + 2 \cdot 0,8 [1 + 0,342]) = 3,147 Mg;$$

für  $\cos \vartheta_2 = \frac{1}{3} \cos \alpha = -0,114$ , d. h.  $\vartheta_2 = 96^\circ 33'$  entsteht (Gl. 12)

$$V_{min} = Mg (1 - 0,8 [1 + 0,039]) = 0,17 Mg.$$

Bei heftigerem Läuten, d. h. grösserem Winkel  $\alpha$  würde  $V_{min}$  selbst  $< 0$  werden können; bleiben die Verhältnisse der Glocke im Übrigen ungeändert, so erfolgt dies für  $\cos \alpha < -0,866$  oder  $\alpha > 150^\circ$ . Bei so grossem Schwingungswinkel würde  $V_{min} < 0$  werden, d. h. die Glocke das Bestreben haben, aus den Lagern zu springen.

Wegen des starken Wechsels der Kraftgrössen empfiehlt es sich, die einzelnen Theile des Glockenstuhles so zu bemessen, dass die bei einer statischen Berechnung auf Grund obiger Kräfte entstehenden Spannungen  $\sigma$  ein Drittel der Spannungen an der Elasticitätsgrenze nicht überschreiten; für Stabeisen wäre etwa  $\sigma = 500 \text{ kg/qcm}$  zu setzen. Die gedrückten Theile sollen mindestens 7fache Sicherheit gegen Zerknicken haben.

Bezüglich der Bedingungen für ein gutes Anschlagen des Klöppels möge auf die Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1877, S. 151 verwiesen werden.

## 6. Aus lothrechter Stellung umfallender Stab.

Der stabförmige Körper, dessen Schwerpunkt  $S$  in dem Abstand  $e$  vom unteren Ende  $A$  liegt (Fig. 163), sei um das untere Ende drehbar, ursprünglich nahezu lothrecht gestellt und falle um. In einer beliebigen Zwischenstellung, in welcher  $AS$  mit der Lothrechten den Winkel  $\vartheta$  einschliesst, ist nach S. 204 die Winkelbeschleunigung

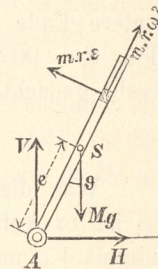
$$1) \quad \varepsilon = \frac{Mge \sin \vartheta}{J} = g \frac{e}{i^2} \sin \vartheta,$$

und für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gilt

$$\omega^2 \frac{J}{2} = Mge (1 - \cos \vartheta), \text{ also}$$

$$2) \quad \omega^2 = 2g \frac{e}{i^2} (1 - \cos \vartheta).$$

Fig. 163.



Die Widerstände  $H$  und  $V$ , welche der untere Drehpunkt  $A$  im Sinne der Fig. 163 leisten muss, bestimmen sich in der bei dem vorigen Beispiele gezeigten Weise leicht zu

$$H = M \cdot e \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta - M \cdot e \cdot \omega^2 \sin \vartheta \quad \text{und}$$

$$V = Mg - M e \varepsilon \sin \vartheta - M e \omega^2 \cos \vartheta,$$

oder mittels der Gl. 1 und 2 zu

$$3) \quad H = Mg \frac{e^2}{i^2} \sin \vartheta (3 \cos \vartheta - 2) \quad \text{und}$$

$$4) \quad V = Mg \left( 1 - \frac{e^2}{i^2} [1 + 2 \cos \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta] \right).$$

Der Werth von  $H$  ist zu Anfang, d. h. für  $\vartheta = 0$ , ebenfalls Null; er wird wiederum zu Null für  $\cos \vartheta = 2/3$ , d. h. für  $\vartheta = 48^\circ$  (vergl. 1. Theil, S. 74). Für  $\vartheta < 48^\circ$  ist  $\cos \vartheta > 2/3$  und  $H > 0$ , d. h. (Fig. 163) nach derjenigen Seite gerichtet, nach welcher die Stange umfällt. Es hat also, wenn die Stange nach rechts umfällt, das untere Ende derselben anfänglich das Bestreben nach links auszugleiten. Zwischen den beiden Nullwerthen von  $H$  liegt ein Maximum für einen Werth von  $\cos \vartheta$ , den man leicht durch Nullsetzung der ersten Abgeleiteten von Gl. 3 nach  $\vartheta$  ermittelt zu

$$\cos \vartheta = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = 0,8933 \quad \text{mit} \quad \vartheta = 26^\circ 40'$$

(ein  $\cos \vartheta < 0$  hat hier keinen Sinn); der entsprechende Werth von  $H$  selbst ergibt sich dann zu

$$H_{max} = Mg \frac{e^2}{i^2} \cdot 0,305.$$

Für  $\vartheta > 48^\circ$  ist  $\cos \vartheta < 2/3$  und  $H < 0$ ; es hat nunmehr das untere Ende der Stange das Bestreben, nach rechts auszugleiten. Für  $\vartheta = 90^\circ$ , d. h. beim Aufschlagen der Stange auf den waagrecht gedachten Boden ist

$$H = - 2 Mg \frac{e^2}{i^2}.$$

Was die Grösse des lothrechten Widerstandes  $V$  anlangt, so ist zu Anfang, d. h. für  $\vartheta = 0$ ,  $V = Mg$ . Mit wachsendem  $\vartheta$  nimmt  $V$  zunächst ab. Ein Kleinstwerth von  $V$  ergibt sich leicht für  $\cos \vartheta = 1/3$  oder  $\vartheta = 70^\circ 30'$ , nämlich

$$V_{min} = Mg \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{e^2}{i^2} \right).$$