Schwingt der Kegel als physisches Pendel um die x-Achse, so ist seine Schwingungslänge (nach 1. Theil, S. 279), weil der Schwerpunkt um $\frac{3}{4}h$ von der Spitze entfernt ist,

$$9)\qquad l = \frac{J_x}{M\cdot \frac{3}{4}h} = \frac{3}{20}\cdot\frac{4}{3h}(r^2 + 4h^2) = \frac{h}{5}\left(4 + \frac{r^2}{h^2}\right).$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine mit AX parallele Schwerpunktsachse wird

$$J_1 = J_2 = J_x - M\cdot(\tfrac{3}{4}h)^2, \text{ also}$$

$$J_1 = J_2 = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{5}h^2 - \frac{9}{16}h^2\right)$$

$$10)\qquad = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{80}h^2\right) = \frac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

In Bezug auf die geometrische Achse des Kegels ist (nach 1. Theil, S. 273)

$$11)\qquad J_3 = \frac{3}{10}Mr^2.$$

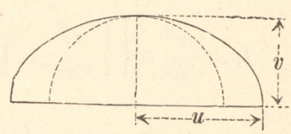
Es wird $J_1 = J_2 = J_3$ für $r^2 + \frac{h^2}{4} = 2r^2$, d. h. für $h = 2r$.

In diesem Fall ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

d) Haupt-Trägheitsmomente für den Schwerpunkt eines dreiachsigen Ellipsoides.

Wird eine Kreisfläche vom Halbmesser v in einer Richtung gleichmässig gedehnt (Fig. 158), so entsteht eine Ellipse der Halbachsen v und u. Bei dieser Dehnung ändern sich der Flächeninhalt und das Trägheitsmoment in Bezug auf den Durchmesser $2u$ in demselben Verhältnisse. Daher bleibt für dieses Trägheitsmoment die für die Kreisfläche entwickelte Formel $J = \frac{1}{4}F\cdot v^2$ auch für die Ellipse gültig. Dies giebt, mit $F = u\cdot v\cdot\pi$,

Fig. 158.



$$J = \frac{\pi}{4}u\cdot v^3.$$

Ebenso gilt für den Durchmesser $2v$

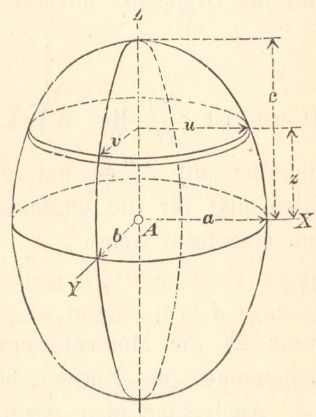
$$J = \frac{\pi}{4} v \cdot u^3,$$

also für das polare Trägheitsmoment

$$J_0 = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2).$$

Schneidet man nun aus einem Ellipsoide rechtwinklig zur Achse AZ eine elliptische Scheibe von den Halbachsen u und v und der Dicke dz heraus (Fig. 159), so liefert diese zu dem Trägheitsmomente des Ellipsoides in Bezug auf die z-Achse einen Beitrag

Fig. 159.



$$dJ_z = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2)\, dz.$$

Wird dies von $z = 0$ bis $z = c$ summirt, so ergiebt sich das Trägheitsmoment des halben Ellipsoides, und für dasjenige des ganzen gilt das doppelte:

$$J_z = \frac{\pi}{2} \int_0^c u \cdot v (u^2 + v^2)\, dz.$$

Nun sind u und z die Koordinaten eines Punktes des einen elliptischen Hauptschnittes von den Halbachsen a und c, daher

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad u^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right); \quad \text{ebenso} \quad v^2 = b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Hiermit wird $\quad J_z = \frac{\pi}{2} \frac{a \cdot b}{c^2} \frac{a^2 + b^2}{c^2} \int_0^c (c^2 - z^2)^2\, dz$

und nach einfacher Ausführung

$$J_z = \frac{4}{15} \pi \cdot a \cdot b \cdot c\, (a^2 + b^2).$$

Da nun $\quad M = \frac{4}{3} a \cdot b \cdot c \cdot \pi \quad$ ist, so folgt schliesslich

$$J_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2). \tag{12}$$

Ebenso wird

13) $$J_y = \frac{M}{5}(a^2 + c^2); \quad J_x = \frac{M}{5}(b^2 + c^2).$$

Für die Kugel wird mit $b = c = a$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} M a^2 \quad \text{(s. 1. Theil, S. 273).}$$

4. Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Bei einem starren Körper ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse unveränderlich, daher wird aus Gl. 6, S. 193

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Hierin ist $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelbeschleunigung; bezeichnet man dieselbe mit ε, so hat man die aus 1. Theil, S. 276 bekannte Gleichung für die ungleichförmige Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse

1) $$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn $\mathfrak{M}$ die Momentensumme der äusseren Kräfte, J das Trägheitsmoment des Körpers, beide bezogen auf die Drehachse, bedeuten.

Auch kann man, wenn für irgend einen Zeitraum ω_1 den Anfangswerth, ω den Endwerth der Winkelgeschwindigkeit, $\mathfrak{A}_k$ die Arbeit der äusseren Kräfte bedeutet, nach dem Satze der Arbeit schreiben (s. 1. Theil, S. 267)

2) $$(\omega^2 - \omega_1{}^2)\frac{J}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Die Berechnung der Widerstände, welche an der Drehachse eines Körpers angreifen müssen, um sie unbeweglich zu erhalten, ist auch schon im 1. Theile, S. 287 allgemein gezeigt worden. Hier sollen noch einige Beispiele dieser Art durchgeführt werden.

5. Widerstände der Achse einer schwingenden Glocke.

Die an der Achse einer Thurmglocke auftretenden Kräfte sind von besonderer Wichtigkeit, da sie nicht nur die Abmessungen