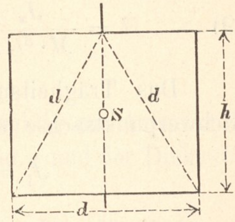
In Bezug auf die $z$-Achse aber ist (nach 1. Theil, S. 272)

6) $$J_z = \frac{M}{2} r^2.$$

Fig. 156.




Das Central-Ellipsoid ist offenbar ein Umdrehungs-Ellipsoid. Dasselbe wird zu einer Kugel für

$$\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{6} = r^2,$$

d. h. für $h^2 = 3r^2$, oder für

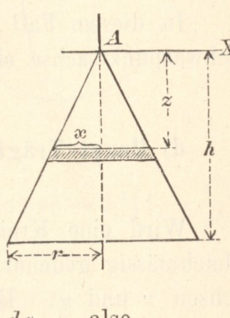
7) $$h = r\sqrt{3} = 1{,}73 \cdot r.$$

Diese Höhe ist diejenige eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite $d = 2r$ (Fig. 156). Für einen Cylinder von diesem Höhenverhältnis ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

## c) Trägheitsmomente eines Kegels.

In Bezug auf eine zur Grundfläche parallele Achse $AX$ durch die Spitze $A$ des Kegels (Fig. 157) ergiebt sich das Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe vom Halbmesser $x$ und im Abstande $z$ von der Spitze gelegen, entsprechend der Gl. 4, zu

Fig. 157.




$$dJ_x = \frac{1}{4} x^4 \pi \cdot dz + x^2 \pi \cdot dz \cdot z^2.$$

Hieraus wird wegen

$$x = \frac{r}{h} \cdot z:$$

$$dJ_x = \frac{1}{4} \frac{r^4}{h^4} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz + \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz, \quad \text{also}$$

$$J_x = \frac{r^2}{h^2} \pi \left\{\frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1\right\} \cdot \int_0^h z^4 dz = \frac{r^2 \pi}{h^2} \left(\frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1\right) \frac{h^5}{5}, \quad \text{oder}$$

$$J_x = r^2 \pi h \left(\frac{r^2}{20} + \frac{h^2}{5}\right),$$

also mit $$r^2 \pi h = 3M:$$

8) $$J_x = \frac{3}{20} M (r^2 + 4h^2).$$

Schwingt der Kegel als physisches Pendel um die $x$-Achse, so ist seine Schwingungslänge (nach 1. Theil, S. 279), weil der Schwerpunkt um $\frac{3}{4}h$ von der Spitze entfernt ist,

9) $$l = \frac{J_x}{M \cdot {}^3/_4 h} = \frac{3}{20} \cdot \frac{4}{3h}(r^2 + 4h^2) = \frac{h}{5}\left(4 + \frac{r^2}{h^2}\right).$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine mit $AX$ parallele Schwerpunktsachse wird

$$J_1 = J_2 = J_x - M \cdot ({}^3/_4 h)^2, \quad \text{also}$$

$$J_1 = J_2 = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{5}h^2 - \frac{9}{16}h^2\right)$$

10) $$= M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{80}h^2\right) = \frac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

In Bezug auf die geometrische Achse des Kegels ist (nach 1. Theil, S. 273)

11) $$J_3 = \frac{3}{10}Mr^2.$$

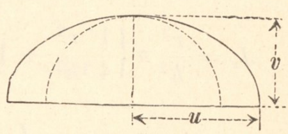
Es wird $J_1 = J_2 = J_3$ für $r^2 + \frac{h^2}{4} = 2r^2$, d. h. für $h = 2r$.

In diesem Fall ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

### d) Haupt-Trägheitsmomente für den Schwerpunkt eines dreiachsigen Ellipsoides.

Wird eine Kreisfläche vom Halbmesser $v$ in einer Richtung gleichmässig gedehnt (Fig. 158), so entsteht eine Ellipse der Halbachsen $v$ und $u$. Bei dieser Dehnung ändern sich der Flächeninhalt und das Trägheitsmoment in Bezug auf den Durchmesser $2u$ in demselben Verhältnisse. Daher bleibt für dieses Trägheitsmoment die für die Kreisfläche entwickelte Formel $J = {}^1/_4 F \cdot v^2$ auch für die Ellipse gültig. Dies giebt, mit $F = u \cdot v \cdot \pi$,

Fig. 158.




$$J = \frac{\pi}{4} u \cdot v^3.$$