Ebenso ist

3) $$J_x = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2).$$

Sind von den drei Kanten zwei einander gleich, z. B. $b = a$, so wird

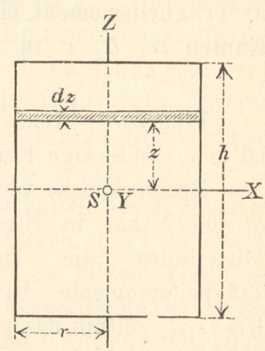
$$J_z = \frac{1}{6} M \cdot a^2; \quad J_x = J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2)$$

und das Central-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid. In diesem Fall ist jede in der xy-Ebene liegende Schwerpunktsachse eine freie Achse mit dem Trägheitsmoment $\frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$. — Für den Würfel ist mit $b = c = a$ $J_z = J_y = J_x = \frac{1}{6} Ma^2$, das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

b) Haupt-Trägheitsmomente eines Cylinders, bezogen auf den Schwerpunkt.

Da das Durchmesser-Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Halbmesser r die Grösse $\frac{1}{4} r^4 \pi$ hat (s. 1. Theil, S. 273), so hat eine kreisförmige Scheibe von dem Halbmesser r und der Dicke dz (Fig. 155) das Durchmesser-Trägheitsmoment $\frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz$ und ein auf die rechtwinklig zur Bildebene liegende Schwerpunktsachse SY bezogenes Trägheitsmoment

Fig. 155.



4) $$dJ_y = \frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz + r^2 \pi \cdot dz \cdot z^2,$$

weil z die Entfernung dieser beiden Achsen ist. Hiernach wird

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + r^2 \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz, \quad \text{oder}$$

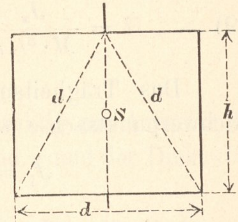
$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + 2 r^2 \pi \cdot \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} = \frac{r^2 \pi h}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right). \quad \text{Also ist}$$

5) $$J_x = J_y = \frac{1}{4} M \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

In Bezug auf die z-Achse aber ist (nach 1. Theil, S. 272)

6) $$J_z = \frac{M}{2} r^2.$$

Fig. 156.



Das Central-Ellipsoid ist offenbar ein Umdrehungs-Ellipsoid. Dasselbe wird zu einer Kugel für

$$\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{6} = r^2,$$

d. h. für $h^2 = 3r^2$, oder für

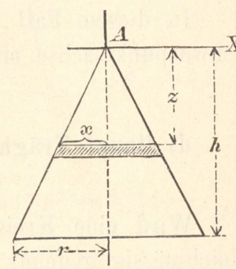
7) $$h = r\sqrt{3} = 1{,}73 \cdot r.$$

Diese Höhe ist diejenige eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite $d = 2r$ (Fig. 156). Für einen Cylinder von diesem Höhenverhältnis ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

c) Trägheitsmomente eines Kegels.

In Bezug auf eine zur Grundfläche parallele Achse AX durch die Spitze A des Kegels (Fig. 157) ergiebt sich das Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe vom Halbmesser x und im Abstande z von der Spitze gelegen, entsprechend der Gl. 4, zu

Fig. 157.



$$dJ_x = \frac{1}{4} x^4 \pi \cdot dz + x^2 \pi \cdot dz \cdot z^2.$$

Hieraus wird wegen

$$x = \frac{r}{h} \cdot z:$$

$$dJ_x = \frac{1}{4} \frac{r^4}{h^4} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz + \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz, \quad \text{also}$$

$$J_x = \frac{r^2}{h^2} \pi \left\{\frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1\right\} \cdot \int_0^h z^4 dz = \frac{r^2 \pi}{h^2} \left(\frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1\right) \frac{h^5}{5}, \quad \text{oder}$$

$$J_x = r^2 \pi h \left(\frac{r^2}{20} + \frac{h^2}{5}\right),$$

also mit $$r^2 \pi h = 3M:$$

8) $$J_x = \frac{3}{20} M (r^2 + 4h^2).$$