und einen rechtwinkligen Abstand von der z-Achse $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, liefert daher zu dem Trägheitsmoment in Bezug auf die z-Achse den Beitrag

$$dJ_z = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz\,(x^2 + y^2);$$

somit ist der allgemeine Ausdruck für das Trägheitsmoment J_z eines Körpers überall gleicher Dichte

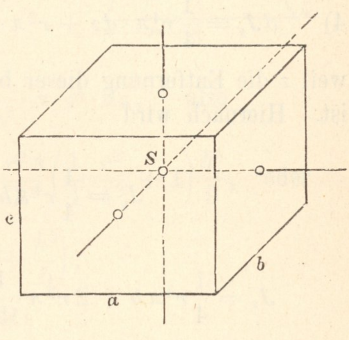
$$1) \qquad J_z = \frac{\gamma}{g} \int\int\int (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die Grenzen der Integrationen sind durch die Form des Körpers bedingt. Doch hat man in den meisten Fällen die allgemeine Gl. 1 nicht nöthig, wenn man bereits bekannte Ergebnisse zu Hülfe nimmt. Die Werthe der Trägheitsmomente drückt man schliesslich meist als Vielfache der Masse M aus; bei der Berechnung kann man also den selbstverständlichen physikalischen Faktor $\frac{\gamma}{g}$ (Masse der Raumeinheit) fortlassen, wenn man nachher auch statt der Masse den Rauminhalt des Körpers einführt.

a) Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds von den Kanten a, b, c in Bezug auf eine zu der Kante c parallele Schwerpunktsachse.

Eine zur z-Achse rechtwinklige Scheibe des Körpers (Fig. 154) ist eine rechteckige Platte von den Seiten a und b und der Dicke dz. Eine Rechteckfläche von den Seiten a und b hat in Bezug auf die Mittellinien die Durchmesser-Trägheitsmomente $^1/_{12}\, a \cdot b^3$ und $^1/_{12}\, b \cdot a^3$, mithin das polare Trägheitsmoment $^1/_{12}\, a \cdot b\,(b^2 + a^2)$ (s. 1. Theil, S. 271). Die Scheibe von der Dicke dz liefert daher zu J_z einen Beitrag

Fig. 154.



$$dJ_z = \frac{1}{12} a \cdot b\,(b^2 + a^2)\,dz,$$

also ist

$$2) \qquad J_z = \frac{1}{12} a \cdot b\,(b^2 + a^2) \cdot c = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

Ebenso ist

3) $$J_x = \frac{1}{12} M(b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2).$$

Sind von den drei Kanten zwei einander gleich, z. B. $b = a$, so wird

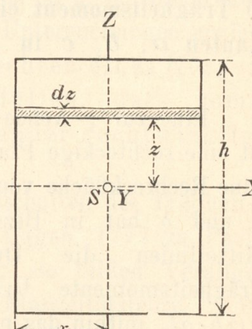
$$J_z = \frac{1}{6} M \cdot a^2; \quad J_x = J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2)$$

und das Central-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid. In diesem Fall ist jede in der xy-Ebene liegende Schwerpunktsachse eine freie Achse mit dem Trägheitsmoment $\frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$. — Für den Würfel ist mit $b = c = a$ $J_z = J_y = J_x = \frac{1}{6} M a^2$, das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

b) Haupt-Trägheitsmomente eines Cylinders, bezogen auf den Schwerpunkt.

Da das Durchmesser-Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Halbmesser r die Grösse $\frac{1}{4} r^4 \pi$ hat (s. 1. Theil, S. 273), so hat eine kreisförmige Scheibe von dem Halbmesser r und der Dicke dz (Fig. 155) das Durchmesser-Trägheitsmoment $\frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz$ und ein auf die rechtwinklig zur Bildebene liegende Schwerpunktsachse SY bezogenes Trägheitsmoment

Fig. 155.



4) $$dJ_y = \frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz + r^2 \pi \cdot dz \cdot z^2,$$

weil z die Entfernung dieser beiden Achsen ist. Hiernach wird

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + r^2 \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz, \quad \text{oder}$$

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + 2 r^2 \pi \cdot \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} = \frac{r^2 \pi h}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right). \quad \text{Also ist}$$

5) $$J_x = J_y = \frac{1}{4} M \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$