Trägheitsmomente in Bezug auf alle durch den Punkt $A$ gehende Achsen von gleicher Grösse, auch hat dann jede dieser Achsen die Eigenschaften einer Hauptachse.

Ist der Punkt $A$ der Schwerpunkt des Körpers, so wird das Trägheits-Ellipsoid im Besonderen **Central-Ellipsoid** genannt. Kennt man die Schwerpunkts-Hauptachsen und deren Trägheitsmomente, so kann man nach Gl. 7 das Trägheitsmoment für jede Schwerpunktsachse $SP$ berechnen und daraus wiederum das Trägheitsmoment für jede zu $SP$ parallele Achse $AP_1$, welche von $SP$ um eine Länge $e$ entfernt ist, weil nach 1. Theil, S. 268 das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse gleich ist dem Trägheitsmomente für eine dazu parallele Schwerpunktsachse $+ M \cdot e^2$.

Im 1. Theile, S. 290 wurden solche Drehachsen eines Körpers, für welche die Centrifugalkräfte sich vollständig aufheben, **freie Achsen** genannt. Die Bedingungen dafür waren, dass diese Achsen durch den Schwerpunkt gehen mussten, und dass ausserdem, wenn $SX$ eine freie Achse sein sollte, und $SY$ nebst $SZ$ zwei andere zu $SX$ und zu einander rechtwinklige Achsen waren, noch die Centrifugalmomente $\Sigma mxy = C_z$ und $\Sigma mxz = C_y$ Null sein mussten. Für gewisse einfache Fälle wurden a. a. O. solche freie Achsen nachgewiesen. Aus den vorstehenden Untersuchungen ergiebt sich nun, dass die Schwerpunkts-Hauptachsen eines Körpers die Bedingungen freier Achsen erfüllen, dass somit jeder Körper mindestens drei zu einander rechtwinklige freie Achsen hat.

Die im Vorstehenden entwickelten Eigenschaften des Trägheits- und Central-Ellipsoides rühren von Poinsot (geb. 1777 zu Paris, gest. 1859 daselbst) her (vom Jahre 1834); sie bilden Verallgemeinerungen der in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 25 behandelten Eigenschaften der Trägheits- und Central-Ellipse für ebene Figuren.

## 3. Berechnung der Trägheitsmomente einiger Körper.

Ein Körpertheilchen vom Rauminhalte $dx \cdot dy \cdot dz$ hat, wenn $\gamma$ das Gewicht der Raumeinheit ist, die Masse $m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

und einen rechtwinkligen Abstand von der $z$-Achse $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, liefert daher zu dem Trägheitsmoment in Bezug auf die $z$-Achse den Beitrag

$$dJ_z = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz\,(x^2 + y^2);$$

somit ist der allgemeine Ausdruck für das Trägheitsmoment $J_z$ eines Körpers überall gleicher Dichte

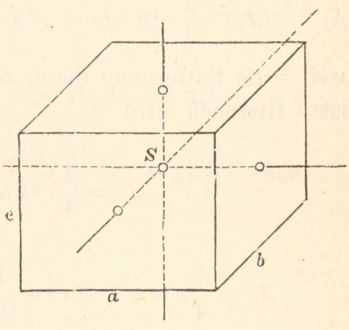
1) $$J_z = \frac{\gamma}{g} \int\int\int (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz\,.$$

Die Grenzen der Integrationen sind durch die Form des Körpers bedingt. Doch hat man in den meisten Fällen die allgemeine Gl. 1 nicht nöthig, wenn man bereits bekannte Ergebnisse zu Hülfe nimmt. Die Werthe der Trägheitsmomente drückt man schliesslich meist als Vielfache der Masse $M$ aus; bei der Berechnung kann man also den selbstverständlichen physikalischen Faktor $\frac{\gamma}{g}$ (Masse der Raumeinheit) fortlassen, wenn man nachher auch statt der Masse den Rauminhalt des Körpers einführt.

### a) Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds von den Kanten $a$, $b$, $c$ in Bezug auf eine zu der Kante $c$ parallele Schwerpunktsachse.

Eine zur $z$-Achse rechtwinklige Scheibe des Körpers (Fig. 154) ist eine rechteckige Platte von den Seiten $a$ und $b$ und der Dicke $dz$. Eine Rechteckfläche von den Seiten $a$ und $b$ hat in Bezug auf die Mittellinien die Durchmesser-Trägheitsmomente $^1/_{12}\, a \cdot b^3$ und $^1/_{12}\, b \cdot a^3$, mithin das polare Trägheitsmoment $^1/_{12}\, a \cdot b\,(b^2 + a^2)$ (s. 1. Theil, S. 271). Die Scheibe von der Dicke $dz$ liefert daher zu $J_z$ einen Beitrag

Fig. 154.




$$dJ_z = \frac{1}{12} a \cdot b\,(b^2 + a^2)\,dz\,,$$

also ist

2) $$J_z = \frac{1}{12} a \cdot b\,(b^2 + a^2) \cdot c = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)\,.$$

Ebenso ist

3) $$J_x = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2).$$

Sind von den drei Kanten zwei einander gleich, z. B. $b = a$, so wird

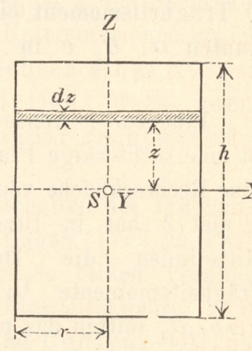
$$J_z = \frac{1}{6} M \cdot a^2; \quad J_x = J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2)$$

und das Central-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid. In diesem Fall ist jede in der $xy$-Ebene liegende Schwerpunktsachse eine freie Achse mit dem Trägheitsmoment $\frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$. — Für den Würfel ist mit $b = c = a$ $J_z = J_y = J_x = \frac{1}{6} M a^2$, das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

### b) Haupt-Trägheitsmomente eines Cylinders, bezogen auf den Schwerpunkt.

Da das Durchmesser-Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Halbmesser $r$ die Grösse $\frac{1}{4} r^4 \pi$ hat (s. 1. Theil, S. 273), so hat eine kreisförmige Scheibe von dem Halbmesser $r$ und der Dicke $dz$ (Fig. 155) das Durchmesser-Trägheitsmoment $\frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz$ und ein auf die rechtwinklig zur Bildebene liegende Schwerpunktsachse $SY$ bezogenes Trägheitsmoment

Fig. 155.




4) $$dJ_y = \frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz + r^2 \pi \cdot dz \cdot z^2,$$

weil $z$ die Entfernung dieser beiden Achsen ist. Hiernach wird

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + r^2 \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz, \quad \text{oder}$$

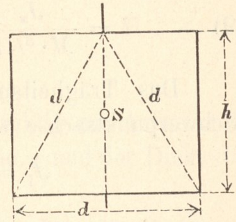
$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + 2 r^2 \pi \cdot \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} = \frac{r^2 \pi h}{4} \left( r^2 + \frac{h^2}{3} \right). \quad \text{Also ist}$$

5) $$J_x = J_y = \frac{1}{4} M \left( r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

In Bezug auf die $z$-Achse aber ist (nach 1. Theil, S. 272)

6) $$J_z = \frac{M}{2} r^2.$$

Fig. 156.




Das Central-Ellipsoid ist offenbar ein Umdrehungs-Ellipsoid. Dasselbe wird zu einer Kugel für

$$\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{6} = r^2,$$

d. h. für $h^2 = 3r^2$, oder für

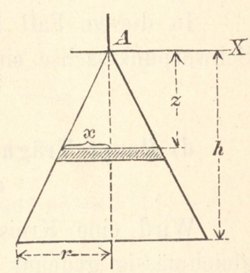
7) $$h = r\sqrt{3} = 1{,}73 \cdot r.$$

Diese Höhe ist diejenige eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite $d = 2r$ (Fig. 156). Für einen Cylinder von diesem Höhenverhältnis ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

## c) Trägheitsmomente eines Kegels.

In Bezug auf eine zur Grundfläche parallele Achse $AX$ durch die Spitze $A$ des Kegels (Fig. 157) ergiebt sich das Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe vom Halbmesser $x$ und im Abstande $z$ von der Spitze gelegen, entsprechend der Gl. 4, zu

Fig. 157.




$$dJ_x = \frac{1}{4} x^4 \pi \cdot dz + x^2 \pi \cdot dz \cdot z^2.$$

Hieraus wird wegen

$$x = \frac{r}{h} \cdot z:$$

$$dJ_x = \frac{1}{4} \frac{r^4}{h^4} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz + \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz, \quad \text{also}$$

$$J_x = \frac{r^2}{h^2} \pi \left\{ \frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1 \right\} \cdot \int_0^h z^4 dz = \frac{r^2 \pi}{h^2} \left( \frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1 \right) \frac{h^5}{5}, \quad \text{oder}$$

$$J_x = r^2 \pi h \left( \frac{r^2}{20} + \frac{h^2}{5} \right),$$

also mit $$r^2 \pi h = 3M:$$

8) $$J_x = \frac{3}{20} M (r^2 + 4h^2).$$

Schwingt der Kegel als physisches Pendel um die $x$-Achse, so ist seine Schwingungslänge (nach 1. Theil, S. 279), weil der Schwerpunkt um $^3/_4 h$ von der Spitze entfernt ist,

$$9)\qquad l = \frac{J_x}{M \cdot {}^3/_4 h} = \frac{3}{20} \cdot \frac{4}{3h}(r^2 + 4h^2) = \frac{h}{5}\left(4 + \frac{r^2}{h^2}\right).$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine mit $AX$ parallele Schwerpunktsachse wird

$$J_1 = J_2 = J_x - M \cdot ({}^3/_4 h)^2, \text{ also}$$

$$J_1 = J_2 = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{5}h^2 - \frac{9}{16}h^2\right)$$

$$10)\qquad = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{80}h^2\right) = \frac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

In Bezug auf die geometrische Achse des Kegels ist (nach 1. Theil, S. 273)

$$11)\qquad J_3 = \frac{3}{10}Mr^2.$$

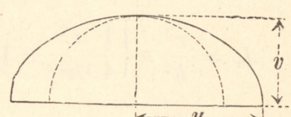
Es wird $J_1 = J_2 = J_3$ für $r^2 + \frac{h^2}{4} = 2r^2$, d. h. für $h = 2r$.

In diesem Fall ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

### d) Haupt-Trägheitsmomente für den Schwerpunkt eines dreiachsigen Ellipsoides.

Wird eine Kreisfläche vom Halbmesser $v$ in einer Richtung gleichmässig gedehnt (Fig. 158), so entsteht eine Ellipse der Halbachsen $v$ und $u$. Bei dieser Dehnung ändern sich der Flächeninhalt und das Trägheitsmoment in Bezug auf den Durchmesser $2u$ in demselben Verhältnisse. Daher bleibt für dieses Trägheitsmoment die für die Kreisfläche entwickelte Formel $J = {}^1/_4 F \cdot v^2$ auch für die Ellipse gültig. Dies giebt, mit $F = u \cdot v \cdot \pi$,

Fig. 158.




$$J = \frac{\pi}{4} u \cdot v^3.$$

Ebenso gilt für den Durchmesser $2v$

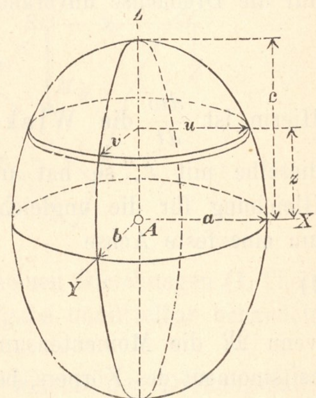
$$J = \frac{\pi}{4} v \cdot u^3,$$

also für das polare Trägheitsmoment

$$J_0 = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2).$$

Schneidet man nun aus einem Ellipsoide rechtwinklig zur Achse $AZ$ eine elliptische Scheibe von den Halbachsen $u$ und $v$ und der Dicke $dz$ heraus (Fig. 159), so liefert diese zu dem Trägheitsmomente des Ellipsoides in Bezug auf die $z$-Achse einen Beitrag

Fig. 159.




$$dJ_z = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2) \, dz.$$

Wird dies von $z = 0$ bis $z = c$ summirt, so ergiebt sich das Trägheitsmoment des halben Ellipsoides, und für dasjenige des ganzen gilt das doppelte:

$$J_z = \frac{\pi}{2} \int_0^c u \cdot v (u^2 + v^2) \, dz.$$

Nun sind $u$ und $z$ die Koordinaten eines Punktes des einen elliptischen Hauptschnittes von den Halbachsen $a$ und $c$, daher

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad u^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right); \quad \text{ebenso} \quad v^2 = b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Hiermit wird $$J_z = \frac{\pi}{2} \frac{a \cdot b}{c^2} \frac{a^2 + b^2}{c^2} \int_0^c (c^2 - z^2)^2 \, dz$$

und nach einfacher Ausführung

$$J_z = \frac{4}{15} \pi \cdot a \cdot b \cdot c (a^2 + b^2).$$

Da nun $M = \frac{4}{3} a \cdot b \cdot c \cdot \pi$ ist, so folgt schliesslich

12) $$J_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2).$$

Ebenso wird

13) $$J_y = \frac{M}{5}(a^2 + c^2); \quad J_x = \frac{M}{5}(b^2 + c^2).$$

Für die Kugel wird mit $b = c = a$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} M a^2 \quad \text{(s. 1. Theil, S. 273).}$$

## 4. Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Bei einem starren Körper ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse unveränderlich, daher wird aus Gl. 6, S. 193

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Hierin ist $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelbeschleunigung; bezeichnet man dieselbe mit $\varepsilon$, so hat man die aus 1. Theil, S. 276 bekannte Gleichung für die ungleichförmige Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse

1) $$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn $\mathfrak{M}$ die Momentensumme der äusseren Kräfte, $J$ das Trägheitsmoment des Körpers, beide bezogen auf die Drehachse, bedeuten.

Auch kann man, wenn für irgend einen Zeitraum $\omega_1$ den Anfangswerth, $\omega$ den Endwerth der Winkelgeschwindigkeit, $\mathfrak{A}_k$ die Arbeit der äusseren Kräfte bedeutet, nach dem Satze der Arbeit schreiben (s. 1. Theil, S. 267)

2) $$(\omega^2 - \omega_1^2)\frac{J}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Die Berechnung der Widerstände, welche an der Drehachse eines Körpers angreifen müssen, um sie unbeweglich zu erhalten, ist auch schon im 1. Theile, S. 287 allgemein gezeigt worden. Hier sollen noch einige Beispiele dieser Art durchgeführt werden.

## 5. Widerstände der Achse einer schwingenden Glocke.

Die an der Achse einer Thurmglocke auftretenden Kräfte sind von besonderer Wichtigkeit, da sie nicht nur die Abmessungen