Sind nun für einen gegebenen Körper und ein festes Achsenkreuz AX, AY, AZ die Trägheits- und die Centrifugalmomente J_x, J_y, J_z, C_z, C_y, C_x bekannt, so liefert Gl. 4 für jede beliebige, durch die Richtungswinkel α, β, γ bestimmte, durch den festen Punkt A gehende Achse AP das Trägheitsmoment J_{AP}.

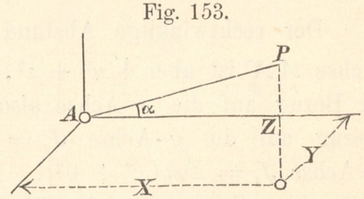
2. Trägheits-Ellipsoid und Central-Ellipsoid.

Die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J von den Winkeln α, β, γ lässt sich für sämmtliche durch den festen Punkt A des Körpers gehende Achsen zur Anschauung bringen mittels einer Ellipsoidfläche. Trägt man auf der Achse AP eine Länge ab, welche mit J in einer bestimmten Beziehung steht, macht man nämlich

5) $$AP = \frac{1}{\sqrt{J}} \quad \text{(Fig. 153),}$$

so ergiebt sich auf dem Fahrstrahl AP ein bestimmter Endpunkt P; lässt man nun die Winkel α, β, γ alle möglichen Werthe annehmen, so ergiebt sich als geometrischer Ort des Endpunktes P eine krumme Fläche, deren Gestalt durch Gl. 4 bedingt sein muss. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes P mit den grossen Buchstaben X, Y, Z zum Unterschiede von den Koordinaten x, y, z des Massentheilchens, so ist nach Fig. 153

Fig. 153.



$$\cos\alpha = \frac{X}{AP} = X \cdot \sqrt{J}; \quad \text{ebenso}$$

$$\cos\beta = Y \cdot \sqrt{J}; \quad \cos\gamma = Z \cdot \sqrt{J}.$$

Führt man diese Werthe in Gl. 4 ein, so entsteht in allen Gliedern der rechten Seite, weil in denselben nur die Quadrate der Kosinus oder die Produkte zweier Kosinus vorkommen, der gemeinschaftliche Faktor J. Theilt man die Gleichung dann durch diesen gemeinschaftlichen Faktor, so verbleibt

6) $$1 = J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 - 2\,C_z X \cdot Y - 2\,C_y X \cdot Z - 2\,C_x Y \cdot Z.$$

Diese Gleichung zweiten Grades nach X, Y, Z mit den Koëfficienten J_x, J_y, J_z, C_z, C_y und C_x bedeutet die Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides, u. zw. mit dem Mittelpunkt A, weil in ihr Glieder mit einfachem X, Y und Z nicht vorkommen. Die Hauptachsen dieses Ellipsoides, des sog. **Trägheits-Ellipsoides,** fallen im Allgemeinen nicht mit den beliebig gewählten Koordinatenachsen zusammen. Da aber die Hauptachsen des Ellipsoides zu einander rechtwinklig stehen, so ist es stets möglich, den Koordinatenachsen solche Richtungen zu geben, dass sie mit den Hauptachsen des Ellipsoides zusammenfallen. Und weil die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung des Ellipsoides die drei letzten Glieder der Gl. 6 mit den Produkten zweier Koordinaten nicht enthält, so folgt, dass die Koëfficienten C_z, C_y und C_x dieser drei letzten Glieder zu Null werden, wenn man die Hauptachsen des Ellipsoides als Koordinatenachsen benutzt. Es giebt also durch jeden Punkt A eines Körpers ein rechtwinkliges Achsenkreuz, in Bezug auf welches die Centrifugalmomente zu Null werden; diese Achsen heissen die **Hauptachsen** des Körpers für den Punkt A. Die Trägheitsmomente in Bezug auf diese heissen **Haupt-Trägheitsmomente**; bezeichnet man sie mit J_1, J_2 und J_3, so wird die Gl. 4, S. 195, bezogen auf das Kreuz der Hauptachsen,

7) $$J_{AP} = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \cos^2 \beta + J_3 \cos^2 \gamma,$$

wenn die Achse AP mit den Hauptachsen die Winkel α, β, γ bildet. Die Gleichung des Trägheits-Ellipsoides wird in Bezug auf die Hauptachsen nach Gl. 6 (S. 196) einfacher

8) $$1 = J_1 X^2 + J_2 Y^2 + J_3 Z^2,$$

und es sind $$\frac{1}{\sqrt{J_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_3}}$$

die Halbachsen des Ellipsoides; es entspricht also der kleinsten Halbachse das grösste der drei Haupt-Trägheitsmomente und umgekehrt. Kennt man diese, so ist nach Gl. 7 für jede andere durch den Punkt A gelegte Achse AP das Trägheitsmoment J zu berechnen.

Sind von den drei Haupt-Trägheitsmomenten zwei einander gleich, so wird das Trägheits-Ellipsoid zu einem Umdrehungs-Ellipsoide. Sind alle drei von gleicher Grösse, so wird das Trägheits-Ellipsoid zu einer Kugel. In diesem Falle sind die

Trägheitsmomente in Bezug auf alle durch den Punkt A gehende Achsen von gleicher Grösse, auch hat dann jede dieser Achsen die Eigenschaften einer Hauptachse.

Ist der Punkt A der Schwerpunkt des Körpers, so wird das Trägheits-Ellipsoid im Besonderen **Central-Ellipsoid** genannt. Kennt man die Schwerpunkts-Hauptachsen und deren Trägheitsmomente, so kann man nach Gl. 7 das Trägheitsmoment für jede Schwerpunktsachse SP berechnen und daraus wiederum das Trägheitsmoment für jede zu SP parallele Achse AP_1, welche von SP um eine Länge e entfernt ist, weil nach 1. Theil, S. 268 das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse gleich ist dem Trägheitsmomente für eine dazu parallele Schwerpunktsachse $+ M \cdot e^2$.

Im 1. Theile, S. 290 wurden solche Drehachsen eines Körpers, für welche die Centrifugalkräfte sich vollständig aufheben, **freie Achsen** genannt. Die Bedingungen dafür waren, dass diese Achsen durch den Schwerpunkt gehen mussten, und dass ausserdem, wenn SX eine freie Achse sein sollte, und SY nebst SZ zwei andere zu SX und zu einander rechtwinklige Achsen waren, noch die Centrifugalmomente $\Sigma mxy = C_z$ und $\Sigma mxz = C_y$ Null sein mussten. Für gewisse einfache Fälle wurden a. a. O. solche freie Achsen nachgewiesen. Aus den vorstehenden Untersuchungen ergiebt sich nun, dass die Schwerpunkts-Hauptachsen eines Körpers die Bedingungen freier Achsen erfüllen, dass somit jeder Körper mindestens drei zu einander rechtwinklige freie Achsen hat.

Die im Vorstehenden entwickelten Eigenschaften des Trägheits- und Central-Ellipsoides rühren von Poinsot (geb. 1777 zu Paris, gest. 1859 daselbst) her (vom Jahre 1834); sie bilden Verallgemeinerungen der in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 25 behandelten Eigenschaften der Trägheits- und Central-Ellipse für ebene Figuren.

3. Berechnung der Trägheitsmomente einiger Körper.

Ein Körpertheilchen vom Rauminhalte $dx \cdot dy \cdot dz$ hat, wenn γ das Gewicht der Raumeinheit ist, die Masse $m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$