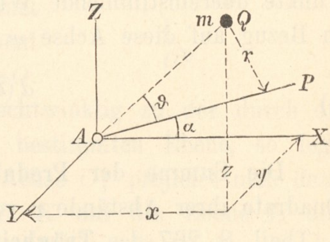
ändern. Würde z. B. die Erde sich in Folge von Abkühlung zusammenziehen, so dass J sich verkleinerte, so müsste ihre Winkelgeschwindigkeit ω grösser werden. Der Umstand, dass zufolge astronomischer Beobachtungen, soweit dieselben zurückreichen, die Zeit der Umdrehung der Erde sich nicht merkbar geändert hat, lässt darauf schliessen, dass auch eine wesentliche Abkühlung der Erde in dieser Zeit nicht mehr erfolgt ist.

C. Bewegung starrer Körper.

I. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Richtung der Achse.

In einem starren Körper werde ein Punkt A gewählt, durch diesen ein rechtwinkliges Achsenkreuz gelegt und ausserdem eine Achse AP, welche mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet (Fig. 152). Hat ein Massentheilchen m die Koordinaten x, y, z und von der Achse AP den rechtwinkligen Abstand r, so liefert es zu dem Trägheitsmoment J des Körpers in Bezug auf die Achse AP den Beitrag

Fig. 152.



$$dJ = m \cdot r^2.$$

Die Verbindungsgerade AQ von A nach dem Massenpunkt m bilde mit AP den Winkel ϑ; dann ist

$$r = AQ \cdot \sin\vartheta, \quad \text{mithin}$$

1) $$dJ = m \cdot \overline{AQ}^2 \sin^2\vartheta = m \cdot \overline{AQ}^2 (1 - \cos^2\vartheta).$$

Hat AQ die Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1, so gilt für den Winkel ϑ zwischen den Geraden AQ und AP nach den Lehren der Analytischen Geometrie des Raumes (vergl. 2. Theil, S. 226) die Beziehung

$$\cos\vartheta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 .$$

Ferner ist $AQ^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

$x = AQ \cdot \cos\alpha_1$; $y = AQ \cdot \cos\beta_1$; $z = AQ \cdot \cos\gamma_1$ und somit

$$AQ \cdot \cos\vartheta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Aus Gl. 1 wird hiermit

$$2)\quad dJ = m\Big\{x^2 + y^2 + z^2 - x^2\cos^2\alpha - y^2\cos^2\beta - z^2\cos^2\gamma$$
$$- 2\,xy\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2\,xz\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma - 2\,yz\cos\beta\cdot\cos\gamma\Big\}.$$

Da nun bekanntlich

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \text{also}$$
$$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$

so kann man $x^2 - x^2\cos^2\alpha$ mit $x^2\cos^2\beta + x^2\cos^2\gamma$ vertauschen, ebenso $y^2 - y^2\cos^2\beta$ mit $y^2\cos^2\alpha + y^2\cos^2\gamma$ und $z^2 - z^2\cos^2\gamma$ mit $z^2\cos^2\alpha + z^2\cos^2\beta$. Führt man dies in Gl. 2 ein und ordnet nach den Winkeln, so wird

$$3)\quad dJ = m\Big\{\cos^2\alpha\,(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,(x^2 + z^2) + \cos^2\gamma\,(x^2 + y^2)$$
$$- 2\,xy\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2\,xz\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma - 2\,yz\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\Big\}.$$

Der rechtwinklige Abstand des Massentheilchens m von der Achse AX ist aber $\sqrt{y^2 + z^2}$, das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die x-Achse also $J_x = \Sigma m\,(y^2 + z^2)$; dasjenige in Bezug auf die y-Achse $J_y = \Sigma m\,(x^2 + z^2)$, in Bezug auf die z-Achse $J_z = \Sigma m\,(x^2 + y^2)$. Bei einer über den ganzen Körper erstreckten Summirung der Gl. 3, bei welcher die Winkel α, β, γ gemeinschaftlich sind, entstehen aus den letzten drei Gliedern noch die Ausdrücke

$$\Sigma mxy, \quad \Sigma mxz \quad \text{und} \quad \Sigma myz;$$

Diese Werthe heissen nach 1. Theil, S. 288 Centrifugalmomente und werden abgekürzt mit C_z, C_y und C_x bezeichnet, wobei man als Index diejenige Koordinate wählt, welche in der betreffenden Summe nicht vorkommt. Hiermit wird das Trägheitsmoment J_{AP} des Körpers in Bezug auf eine Achse AP mit den Richtungswinkeln α, β, γ:

$$4)\quad J_{AP} = \cos^2\alpha\cdot J_x + \cos^2\beta\cdot J_y + \cos^2\gamma\cdot J_z - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot C_z$$
$$- 2\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot C_y - 2\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot C_x.$$

Sind nun für einen gegebenen Körper und ein festes Achsenkreuz AX, AY, AZ die Trägheits- und die Centrifugalmomente J_x, J_y, J_z, C_z, C_y, C_x bekannt, so liefert Gl. 4 für jede beliebige, durch die Richtungswinkel α, β, γ bestimmte, durch den festen Punkt A gehende Achse AP das Trägheitsmoment J_{AP}.

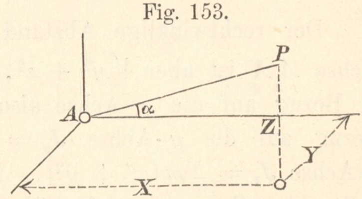
2. Trägheits-Ellipsoid und Central-Ellipsoid.

Die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J von den Winkeln α, β, γ lässt sich für sämmtliche durch den festen Punkt A des Körpers gehende Achsen zur Anschauung bringen mittels einer Ellipsoidfläche. Trägt man auf der Achse AP eine Länge ab, welche mit J in einer bestimmten Beziehung steht, macht man nämlich

5) $$AP = \frac{1}{\sqrt{J}} \quad \text{(Fig. 153)},$$

so ergiebt sich auf dem Fahrstrahl AP ein bestimmter Endpunkt P; lässt man nun die Winkel α, β, γ alle möglichen Werthe annehmen, so ergiebt sich als geometrischer Ort des Endpunktes P eine krumme Fläche, deren Gestalt durch Gl. 4 bedingt sein muss. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes P mit den grossen Buchstaben X, Y, Z zum Unterschiede von den Koordinaten x, y, z des Massentheilchens, so ist nach Fig. 153

Fig. 153.



$$\cos\alpha = \frac{X}{AP} = X \cdot \sqrt{J}; \quad \text{ebenso}$$

$$\cos\beta = Y \cdot \sqrt{J}; \quad \cos\gamma = Z \cdot \sqrt{J}.$$

Führt man diese Werthe in Gl. 4 ein, so entsteht in allen Gliedern der rechten Seite, weil in denselben nur die Quadrate der Kosinus oder die Produkte zweier Kosinus vorkommen, der gemeinschaftliche Faktor J. Theilt man die Gleichung dann durch diesen gemeinschaftlichen Faktor, so verbleibt

6) $$1 = J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 - 2C_z X \cdot Y - 2C_y X \cdot Z - 2C_x Y \cdot Z.$$