

ändern. Würde z. B. die Erde sich in Folge von Abkühlung zusammenziehen, so dass  $J$  sich verkleinerte, so müsste ihre Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  grösser werden. Der Umstand, dass zufolge astronomischer Beobachtungen, soweit dieselben zurückreichen, die Zeit der Umdrehung der Erde sich nicht merkbar geändert hat, lässt darauf schliessen, dass auch eine wesentliche Abkühlung der Erde in dieser Zeit nicht mehr erfolgt ist.

## C. Bewegung starrer Körper.

### I. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Richtung der Achse.

In einem starren Körper werde ein Punkt  $A$  gewählt, durch diesen ein rechtwinkliges Achsenkreuz gelegt und ausserdem eine Achse  $AP$ , welche mit den Koordinatenachsen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bildet (Fig. 152). Hat ein Massenthcilchen  $m$  die Koordinaten  $x, y, z$  und von der Achse  $AP$  den rechtwinkligen Abstand  $r$ , so liefert es zu dem Trägheitsmoment  $J$  des Körpers in Bezug auf die Achse  $AP$  den Beitrag

$$dJ = m \cdot r^2.$$

Die Verbindungsgerade  $AQ$  von  $A$  nach dem Massenpunkt  $m$  bilde mit  $AP$  den Winkel  $\vartheta$ ; dann ist

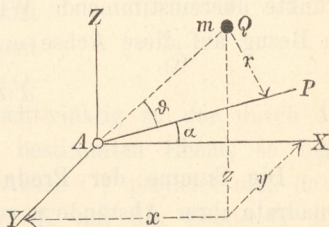
$$r = AQ \cdot \sin \vartheta, \quad \text{mithin}$$

$$1) \quad dJ = m \cdot \overline{AQ}^2 \sin^2 \vartheta = m \cdot \overline{AQ}^2 (1 - \cos^2 \vartheta).$$

Hat  $AQ$  die Richtungswinkel  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , so gilt für den Winkel  $\vartheta$  zwischen den Geraden  $AQ$  und  $AP$  nach den Lehren der Analytischen Geometrie des Raumes (vergl. 2. Theil, S. 226) die Beziehung

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1.$$

Fig. 152.



Ferner ist  $AQ^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ;

$x = AQ \cdot \cos \alpha_1$ ;  $y = AQ \cdot \cos \beta_1$ ;  $z = AQ \cdot \cos \gamma_1$  und somit

$$AQ \cdot \cos \vartheta = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

Aus Gl. 1 wird hiermit

$$2) \quad dJ = m \left\{ x^2 + y^2 + z^2 - x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \cos^2 \beta - z^2 \cos^2 \gamma \right. \\ \left. - 2xy \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2xz \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cdot \cos \gamma \right\}.$$

Da nun bekanntlich

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad \text{also}$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma,$$

so kann man  $x^2 - x^2 \cos^2 \alpha$  mit  $x^2 \cos^2 \beta + x^2 \cos^2 \gamma$  vertauschen, ebenso  $y^2 - y^2 \cos^2 \beta$  mit  $y^2 \cos^2 \alpha + y^2 \cos^2 \gamma$  und  $z^2 - z^2 \cos^2 \gamma$  mit  $z^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos^2 \beta$ . Führt man dies in Gl. 2 ein und ordnet nach den Winkeln, so wird

$$3) \quad dJ = m \left\{ \cos^2 \alpha (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta (x^2 + z^2) + \cos^2 \gamma (x^2 + y^2) \right. \\ \left. - 2xy \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2xz \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - 2yz \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \right\}.$$

Der rechtwinklige Abstand des Massentheilchens  $m$  von der Achse  $AX$  ist aber  $\sqrt{y^2 + z^2}$ , das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die  $x$ -Achse also  $J_x = \sum m (y^2 + z^2)$ ; dasjenige in Bezug auf die  $y$ -Achse  $J_y = \sum m (x^2 + z^2)$ , in Bezug auf die  $z$ -Achse  $J_z = \sum m (x^2 + y^2)$ . Bei einer über den ganzen Körper erstreckten Summierung der Gl. 3, bei welcher die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  gemeinschaftlich sind, entstehen aus den letzten drei Gliedern noch die Ausdrücke

$$\sum mxy, \quad \sum mxz \quad \text{und} \quad \sum myz;$$

Diese Werthe heissen nach 1. Theil, S. 288 Centrifugalmomente und werden abgekürzt mit  $C_z, C_y$  und  $C_x$  bezeichnet, wobei man als Index diejenige Koordinate wählt, welche in der betreffenden Summe nicht vorkommt. Hiermit wird das Trägheitsmoment  $J_{AP}$  des Körpers in Bezug auf eine Achse  $AP$  mit den Richtungswinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$4) \quad J_{AP} = \cos^2 \alpha \cdot J_x + \cos^2 \beta \cdot J_y + \cos^2 \gamma \cdot J_z - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot C_z \\ - 2 \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot C_y - 2 \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot C_x.$$

Sind nun für einen gegebenen Körper und ein festes Achsenkreuz  $AX, AY, AZ$  die Trägheits- und die Centrifugalmomente  $J_x, J_y, J_z, C_x, C_y, C_z$  bekannt, so liefert Gl. 4 für jede beliebige, durch die Richtungswinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmte, durch den festen Punkt  $A$  gehende Achse  $AP$  das Trägheitsmoment  $J_{AP}$ .

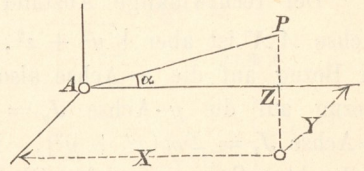
## 2. Trägheits-Ellipsoid und Central-Ellipsoid.

Die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes  $J$  von den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  lässt sich für sämtliche durch den festen Punkt  $A$  des Körpers gehende Achsen zur Anschauung bringen mittels einer Ellipsoidfläche. Trägt man auf der Achse  $AP$  eine Länge ab, welche mit  $J$  in einer bestimmten Beziehung steht, macht man nämlich

$$5) \quad AP = \frac{1}{\sqrt{J}} \quad (\text{Fig. 153}),$$

so ergibt sich auf dem Fahrstrahl  $AP$  ein bestimmter Endpunkt  $P$ ; lässt man nun die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  alle möglichen Werthe annehmen, so ergibt sich als geometrischer Ort des Endpunktes  $P$  eine krumme Fläche, deren Gestalt durch Gl. 4 bedingt sein muss. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes  $P$  mit den grossen Buchstaben  $X, Y, Z$  zum Unterschiede von den Koordinaten  $x, y, z$  des Massentheilchens, so ist nach Fig. 153

Fig. 153.



$$\cos \alpha = \frac{X}{AP} = X \cdot \sqrt{J}; \quad \text{ebenso}$$

$$\cos \beta = Y \cdot \sqrt{J}; \quad \cos \gamma = Z \cdot \sqrt{J}.$$

Führt man diese Werthe in Gl. 4 ein, so entsteht in allen Gliedern der rechten Seite, weil in denselben nur die Quadrate der Kosinus oder die Produkte zweier Kosinus vorkommen, der gemeinschaftliche Faktor  $J$ . Theilt man die Gleichung dann durch diesen gemeinschaftlichen Faktor, so verbleibt

$$6) \quad 1 = J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 - 2 C_x X \cdot Y - 2 C_y X \cdot Z - 2 C_z Y \cdot Z.$$

Diese Gleichung zweiten Grades nach  $X, Y, Z$  mit den Koeffizienten  $J_x, J_y, J_z, C_z, C_y$  und  $C_x$  bedeutet die Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides, u. zw. mit dem Mittelpunkt  $A$ , weil in ihr Glieder mit einfachem  $X, Y$  und  $Z$  nicht vorkommen. Die Hauptachsen dieses Ellipsoides, des sog. **Trägheits-Ellipsoides**, fallen im Allgemeinen nicht mit den beliebig gewählten Koordinatenachsen zusammen. Da aber die Hauptachsen des Ellipsoides zu einander rechtwinklig stehen, so ist es stets möglich, den Koordinatenachsen solche Richtungen zu geben, dass sie mit den Hauptachsen des Ellipsoides zusammenfallen. Und weil die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung des Ellipsoides die drei letzten Glieder der Gl. 6 mit den Produkten zweier Koordinaten nicht enthält, so folgt, dass die Koeffizienten  $C_z, C_y$  und  $C_x$  dieser drei letzten Glieder zu Null werden, wenn man die Hauptachsen des Ellipsoides als Koordinatenachsen benutzt. Es giebt also durch jeden Punkt  $A$  eines Körpers ein rechtwinkliges Achsenkreuz, in Bezug auf welches die Centrifugalmomente zu Null werden; diese Achsen heissen die **Hauptachsen** des Körpers für den Punkt  $A$ . Die Trägheitsmomente in Bezug auf diese heissen **Haupt-Trägheitsmomente**; bezeichnet man sie mit  $J_1, J_2$  und  $J_3$ , so wird die Gl. 4, S. 195, bezogen auf das Kreuz der Hauptachsen,

$$7) \quad J_{AP} = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \cos^2 \beta + J_3 \cos^2 \gamma,$$

wenn die Achse  $AP$  mit den Hauptachsen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bildet. Die Gleichung des Trägheits-Ellipsoides wird in Bezug auf die Hauptachsen nach Gl. 6 (S. 196) einfacher

$$8) \quad 1 = J_1 X^2 + J_2 Y^2 + J_3 Z^2,$$

und es sind

$$\frac{1}{\sqrt{J_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_3}}$$

die Halbachsen des Ellipsoides; es entspricht also der kleinsten Halbachse das grösste der drei Haupt-Trägheitsmomente und umgekehrt. Kennt man diese, so ist nach Gl. 7 für jede andere durch den Punkt  $A$  gelegte Achse  $AP$  das Trägheitsmoment  $J$  zu berechnen.

Sind von den drei Haupt-Trägheitsmomenten zwei einander gleich, so wird das Trägheits-Ellipsoid zu einem Umdrehungs-Ellipsoide. Sind alle drei von gleicher Grösse, so wird das Trägheits-Ellipsoid zu einer Kugel. In diesem Falle sind die

Trägheitsmomente in Bezug auf alle durch den Punkt  $A$  gehende Achsen von gleicher Grösse, auch hat dann jede dieser Achsen die Eigenschaften einer Hauptachse.

Ist der Punkt  $A$  der Schwerpunkt des Körpers, so wird das Trägheits-Ellipsoid im Besonderen **Central-Ellipsoid** genannt. Kennt man die Schwerpunkts-Hauptachsen und deren Trägheitsmomente, so kann man nach Gl. 7 das Trägheitsmoment für jede Schwerpunktsachse  $SP$  berechnen und daraus wiederum das Trägheitsmoment für jede zu  $SP$  parallele Achse  $AP_1$ , welche von  $SP$  um eine Länge  $e$  entfernt ist, weil nach 1. Theil, S. 268 das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse gleich ist dem Trägheitsmomente für eine dazu parallele Schwerpunktsachse  $+ M \cdot e^2$ .

Im 1. Theile, S. 290 wurden solche Drehachsen eines Körpers, für welche die Centrifugalkräfte sich vollständig aufheben, **freie Achsen** genannt. Die Bedingungen dafür waren, dass diese Achsen durch den Schwerpunkt gehen mussten, und dass ausserdem, wenn  $SX$  eine freie Achse sein sollte, und  $SY$  nebst  $SZ$  zwei andere zu  $SX$  und zu einander rechtwinklige Achsen waren, noch die Centrifugalmomente  $\sum mxy = C_z$  und  $\sum mxz = C_y$  Null sein mussten. Für gewisse einfache Fälle wurden a. a. O. solche freie Achsen nachgewiesen. Aus den vorstehenden Untersuchungen ergibt sich nun, dass die Schwerpunkts-Hauptachsen eines Körpers die Bedingungen freier Achsen erfüllen, dass somit jeder Körper mindestens drei zu einander rechtwinklige freie Achsen hat.

Die im Vorstehenden entwickelten Eigenschaften des Trägheits- und Central-Ellipsoides rühren von Poinsot (geb. 1777 zu Paris, gest. 1859 daselbst) her (vom Jahre 1834); sie bilden Verallgemeinerungen der in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 25 behandelten Eigenschaften der Trägheits- und Central-Ellipse für ebene Figuren.

### 3. Berechnung der Trägheitsmomente einiger Körper.

Ein Körperteilchen vom Rauminhalte  $dx \cdot dy \cdot dz$  hat, wenn  $\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit ist, die Masse  $m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

und einen rechtwinkligen Abstand von der  $z$ -Achse  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , liefert daher zu dem Trägheitsmoment in Bezug auf die  $z$ -Achse den Beitrag

$$dJ_z = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz (x^2 + y^2);$$

somit ist der allgemeine Ausdruck für das Trägheitsmoment  $J_z$  eines Körpers überall gleicher Dichte

$$1) \quad J_z = \frac{\gamma}{g} \iiint (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die Grenzen der Integrationen sind durch die Form des Körpers bedingt. Doch hat man in den meisten Fällen die allgemeine Gl. 1 nicht nöthig, wenn man bereits bekannte Ergebnisse zu Hülfe nimmt. Die Werthe der Trägheitsmomente drückt man schliesslich meist als Vielfache der Masse  $M$  aus; bei der Berechnung kann man also den selbstverständlichen physikalischen Faktor  $\frac{\gamma}{g}$  (Masse der Raumeinheit) fortlassen, wenn man nachher auch statt der Masse den Rauminhalt des Körpers einführt.

### a) Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds von den Kanten $a$ , $b$ , $c$ in Bezug auf eine zu der Kante $c$ parallele Schwerpunktsachse.

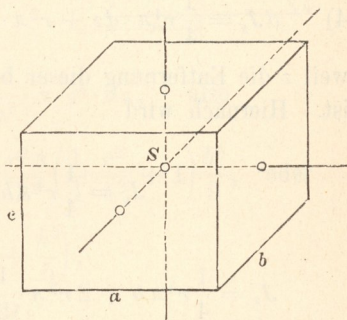
Eine zur  $z$ -Achse rechtwinklige Scheibe des Körpers (Fig. 154) ist eine rechteckige Platte von den Seiten  $a$  und  $b$  und der Dicke  $dz$ . Eine Rechteckfläche von den Seiten  $a$  und  $b$  hat in Bezug auf die Mittellinien die Durchmesser-Trägheitsmomente  $\frac{1}{12} a \cdot b^3$  und  $\frac{1}{12} b \cdot a^3$ , mithin das polare Trägheitsmoment  $\frac{1}{12} a \cdot b (b^2 + a^2)$  (s. 1. Theil, S. 271). Die Scheibe von der Dicke  $dz$  liefert daher zu  $J_z$  einen Beitrag

$$dJ_z = \frac{1}{12} a \cdot b (b^2 + a^2) dz,$$

also ist

$$2) \quad J_z = \frac{1}{12} a \cdot b (b^2 + a^2) \cdot c = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

Fig. 154.



Ebenso ist

$$3) \quad J_x = \frac{1}{12} M(b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2).$$

Sind von den drei Kanten zwei einander gleich, z. B.  $b = a$ , so wird

$$J_z = \frac{1}{6} M \cdot a^2; \quad J_x = J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2)$$

und das Central-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid. In diesem Fall ist jede in der  $xy$ -Ebene liegende Schwerpunktsachse eine freie Achse mit dem Trägheitsmoment  $\frac{1}{12} M(a^2 + c^2)$ . — Für den Würfel ist mit  $b = c = a$   $J_z = J_y = J_x = \frac{1}{6} Ma^2$ , das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

### b) Haupt-Trägheitsmomente eines Cylinders, bezogen auf den Schwerpunkt.

Da das Durchmesser-Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Halbmesser  $r$  die Grösse  $\frac{1}{4} r^4 \pi$  hat (s. 1. Theil, S. 273), so hat eine kreisförmige Scheibe von dem Halbmesser  $r$  und der Dicke  $dz$  (Fig. 155) das Durchmesser-Trägheitsmoment  $\frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz$  und ein auf die rechtwinklig zur Bildebene liegende Schwerpunktsachse  $SY$  bezogenes Trägheitsmoment

$$4) \quad dJ_y = \frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz + r^2 \pi \cdot dz \cdot z^2,$$

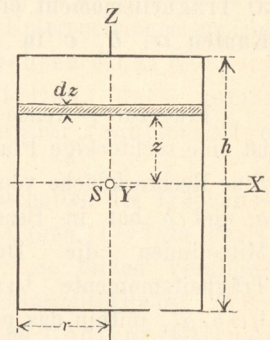
weil  $z$  die Entfernung dieser beiden Achsen ist. Hiernach wird

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + r^2 \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz, \quad \text{oder}$$

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + 2 r^2 \pi \cdot \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} = \frac{r^2 \pi h}{4} \left( r^2 + \frac{h^2}{3} \right). \quad \text{Also ist}$$

$$5) \quad J_x = J_y = \frac{1}{4} M \left( r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

Fig. 155.



In Bezug auf die  $z$ -Achse aber ist (nach 1. Theil, S. 272)

$$6) \quad J_z = \frac{M}{2} r^2.$$

Fig. 156.

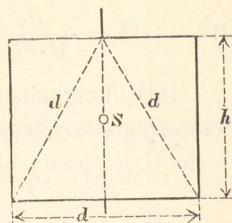
Das Central-Ellipsoid ist offenbar ein Um-drehungs-Ellipsoid. Dasselbe wird zu einer Kugel für

$$\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{6} = r^2,$$

d. h. für  $h^2 = 3r^2$ , oder für

$$7) \quad h = r\sqrt{3} = 1,73 \cdot r.$$

Diese Höhe ist diejenige eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite  $d = 2r$  (Fig. 156). Für einen Cylinder von diesem Höhenverhältnis ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.



### c) Trägheitsmomente eines Kegels.

In Bezug auf eine zur Grundfläche parallele Achse  $AX$  durch die Spitze  $A$  des Kegels (Fig. 157) ergibt sich das Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe vom Halbmesser  $x$  und im Abstände  $z$  von der Spitze gelegen, entsprechend der Gl. 4, zu

$$dJ_x = \frac{1}{4} x^4 \pi \cdot dz + x^2 \pi \cdot dz \cdot z^2.$$

Hieraus wird wegen

$$x = \frac{r}{h} \cdot z:$$

$$dJ_x = \frac{1}{4} \frac{r^4}{h^4} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz + \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz, \quad \text{also}$$

$$J_x = \frac{r^2}{h^2} \pi \left\{ \frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1 \right\} \cdot \int_0^h z^4 dz = \frac{r^2 \pi}{h^2} \left( \frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1 \right) \frac{h^5}{5}, \quad \text{oder}$$

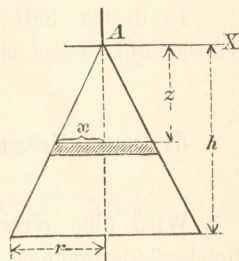
$$J_x = r^2 \pi h \left( \frac{r^2}{20} + \frac{h^2}{5} \right),$$

also mit

$$r^2 \pi h = 3M:$$

$$8) \quad J_x = \frac{3}{20} M (r^2 + 4h^2).$$

Fig. 157.





Schwingt der Kegel als physisches Pendel um die  $x$ -Achse, so ist seine Schwingungslänge (nach 1. Theil, S. 279), weil der Schwerpunkt um  $3/4 h$  von der Spitze entfernt ist,

$$9) \quad l = \frac{J_x}{M \cdot 3/4 h} = \frac{3}{20} \cdot \frac{4}{3 h} (r^2 + 4 h^2) = \frac{h}{5} \left( 4 + \frac{r^2}{h^2} \right).$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine mit  $AX$  parallele Schwerpunktsachse wird

$$J_1 = J_2 = J_x - M \cdot (3/4 h)^2, \text{ also}$$

$$10) \quad \begin{aligned} J_1 = J_2 &= M \left( \frac{3}{20} r^2 + \frac{3}{5} h^2 - \frac{9}{16} h^2 \right) \\ &= M \left( \frac{3}{20} r^2 + \frac{3}{80} h^2 \right) = \frac{3}{20} M \left( r^2 + \frac{h^2}{4} \right). \end{aligned}$$

In Bezug auf die geometrische Achse des Kegels ist (nach 1. Theil, S. 273)

$$11) \quad J_3 = \frac{3}{10} M r^2.$$

Es wird  $J_1 = J_2 = J_3$  für  $r^2 + \frac{h^2}{4} = 2 r^2$ , d. h. für  $h = 2 r$ .

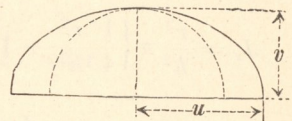
In diesem Fall ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

#### d) Haupt-Trägheitsmomente für den Schwerpunkt eines dreiachsigen Ellipsoides.

Wird eine Kreisfläche vom Halbmesser  $v$  in einer Richtung gleichmässig gedehnt (Fig. 158), so entsteht eine Ellipse der Halbachsen  $v$  und  $u$ . Bei dieser Dehnung ändern sich der Flächeninhalt und das Trägheitsmoment in Bezug auf den Durchmesser  $2u$  in demselben Verhältnisse. Daher bleibt für dieses Trägheitsmoment die für die Kreisfläche entwickelte Formel  $J = 1/4 F \cdot v^2$  auch für die Ellipse gültig. Dies giebt, mit  $F = u \cdot v \cdot \pi$ ,

$$J = \frac{\pi}{4} u \cdot v^3.$$

Fig. 158.



Ebenso gilt für den Durchmesser  $2v$

$$J = \frac{\pi}{4} v \cdot u^3,$$

also für das polare Trägheitsmoment

$$J_0 = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2).$$

Schneidet man nun aus einem Ellipsoide rechtwinklig zur Achse  $AZ$  eine elliptische Scheibe von den Halbachsen  $u$  und  $v$  und der Dicke  $dz$  heraus (Fig. 159), so liefert diese zu dem Trägheitsmomente des Ellipsoides in Bezug auf die  $z$ -Achse einen Beitrag

$$dJ_z = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2) dz.$$

Wird dies von  $z = 0$  bis  $z = c$  summiert, so ergibt sich das Trägheitsmoment des halben Ellipsoides, und für dasjenige des ganzen gilt das doppelte:

$$J_z = \frac{\pi}{2} \int_0^c u \cdot v (u^2 + v^2) dz.$$

Nun sind  $u$  und  $z$  die Koordinaten eines Punktes des einen elliptischen Hauptschnittes von den Halbachsen  $a$  und  $c$ , daher

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad u^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right); \quad \text{ebenso} \quad v^2 = b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Hiermit wird

$$J_z = \frac{\pi}{2} \frac{a \cdot b}{c^2} \frac{a^2 + b^2}{c^2} \int_0^c (c^2 - z^2)^2 dz$$

und nach einfacher Ausführung

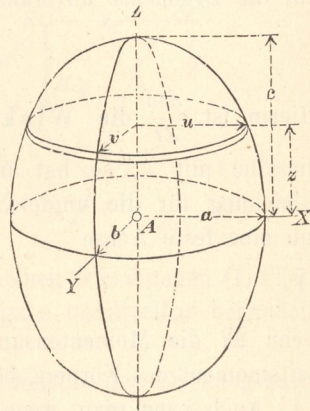
$$J_z = \frac{4}{15} \pi \cdot a \cdot b \cdot c (a^2 + b^2).$$

Da nun

$$M = \frac{4}{3} a \cdot b \cdot c \cdot \pi \quad \text{ist, so folgt schliesslich}$$

$$12) \quad J_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2).$$

Fig. 159.



Ebenso wird

$$13) \quad J_y = \frac{M}{5}(a^2 + c^2); \quad J_x = \frac{M}{5}(b^2 + c^2).$$

Für die Kugel wird mit  $b = c = a$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}Ma^2 \quad (\text{s. 1. Theil, S. 273}).$$

#### 4. Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Bei einem starren Körper ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse unveränderlich, daher wird aus Gl. 6, S. 193

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Hierin ist  $\frac{d\omega}{dt}$  die Winkelbeschleunigung; bezeichnet man dieselbe mit  $\varepsilon$ , so hat man die aus 1. Theil, S. 276 bekannte Gleichung für die ungleichförmige Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse

$$1) \quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn  $\mathfrak{M}$  die Momentensumme der äusseren Kräfte,  $J$  das Trägheitsmoment des Körpers, beide bezogen auf die Drehachse, bedeuten.

Auch kann man, wenn für irgend einen Zeitraum  $\omega_1$  den Anfangswerth,  $\omega$  den Endwerth der Winkelgeschwindigkeit,  $\mathfrak{A}_k$  die Arbeit der äusseren Kräfte bedeutet, nach dem Satze der Arbeit schreiben (s. 1. Theil, S. 267)

$$2) \quad (\omega^2 - \omega_1^2) \frac{J}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Die Berechnung der Widerstände, welche an der Drehachse eines Körpers angreifen müssen, um sie unbeweglich zu erhalten, ist auch schon im 1. Theile, S. 287 allgemein gezeigt worden. Hier sollen noch einige Beispiele dieser Art durchgeführt werden.

#### 5. Widerstände der Achse einer schwingenden Glocke.

Die an der Achse einer Thurm-glocke auftretenden Kräfte sind von besonderer Wichtigkeit, da sie nicht nur die Abmessungen

des sog. Glockenstuhles, sondern, wegen der hohen Lage des letzteren, häufig auch die Standsicherheit des Thurmes bedingen. Die zur wagerechten Drehachse ( $x$ -Achse) der Glocke rechtwinklige  $yz$ -Ebene durch den Schwerpunkt  $S$  ist eine Symmetrieebene (Fig. 160); daher muss in ihr auch der Gesamt-widerstand der Drehachse liegen und sich in zwei Hälften auf die symmetrisch angeordneten beiden Drehzapfen vertheilen. Aus diesem Grunde kommen bei dieser Aufgabe nur die Projektionen der Kräfte auf die  $yz$ -Ebene in Frage, wodurch die Untersuchung so vereinfacht wird, dass wir nicht auf die allgemeinen Gleichungen (1. Theil, S. 288) zurückgreifen, sondern die Aufgabe unmittelbar behandeln wollen.

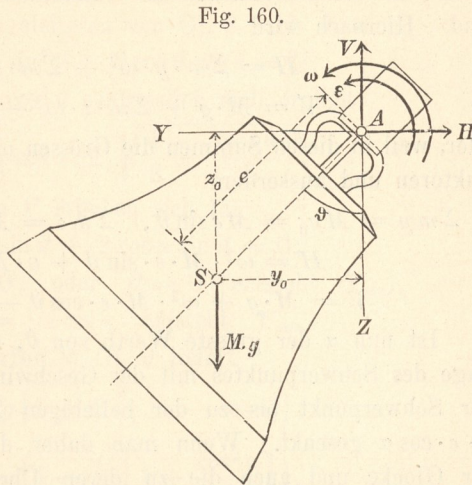


Fig. 160.

In einem beliebigen Zeitpunkte  $t$  weiche der Drehungshalbmesser  $AS = e$  des Schwerpunktes um den Winkel  $\vartheta$  von der Lothrechten ab, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung seien  $\omega$  und  $\varepsilon$ , die Koordinaten des Schwerpunktes

1)  $y_0 = e \cdot \sin \vartheta$ ;  $z_0 = e \cdot \cos \vartheta$ .

Einem Massentheilchen  $m$  der Glocke im Abstand  $r$  von der Drehachse und mit den Koordinaten

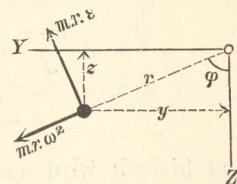
$$y = r \sin \varphi; \quad z = r \cos \varphi$$

(Fig. 161) entsprechen nach 1. Theil, S. 277 die Ergänzungskräfte  $m \cdot r \cdot \omega^2$  und  $m \cdot r \cdot \varepsilon$ , welche in den Richtungen der positiven  $y$ - und  $z$ -Achse zusammen die Seitenkräfte liefern

$$m \cdot r \cdot \omega^2 \sin \varphi + m \cdot r \cdot \varepsilon \cos \varphi = m \cdot y \cdot \omega^2 + m \cdot z \cdot \varepsilon \quad \text{und}$$

$$m \cdot r \cdot \omega^2 \cos \varphi - m \cdot r \cdot \varepsilon \sin \varphi = m \cdot z \cdot \omega^2 - m \cdot y \cdot \varepsilon.$$

Fig. 161.



Die wirklichen äusseren Kräfte  $H$ ,  $V$  und  $Mg$  (Fig. 160) müssen nun nach dem Satze d'Alembert's (s. 1. Theil, S. 139) der Gesammtheit der Ergänzungskräfte das Gleichgewicht halten, wenn  $V$  und  $H$  die Seitenkräfte des Gesamtwiderstandes der Drehachse sind. Hiernach wird

$$2) \quad H = \Sigma m \cdot y \cdot \omega^2 + \Sigma m \cdot z \cdot \varepsilon \quad \text{und}$$

$$3) \quad V = M \cdot g + \Sigma m \cdot z \cdot \omega^2 - \Sigma m \cdot y \cdot \varepsilon,$$

oder, weil in diesen Summen die Grössen  $\omega^2$  und  $\varepsilon$  gemeinschaftliche Faktoren und ausserdem

$$\Sigma m y = M y_0 = M e \sin \vartheta, \quad \Sigma m z = M z_0 = M e \cos \vartheta \quad \text{sind,}$$

$$4) \quad H = \omega^2 \cdot M \cdot e \cdot \sin \vartheta + \varepsilon \cdot M \cdot e \cdot \cos \vartheta,$$

$$5) \quad V = M \cdot g + \omega^2 \cdot M \cdot e \cdot \cos \vartheta - \varepsilon \cdot M \cdot e \cdot \sin \vartheta.$$

Ist nun  $\alpha$  der grösste Werth von  $\vartheta$ , entsprechend der höchsten Lage des Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit Null, so hat sich der Schwerpunkt bis zu der beliebigen Zwischenlage um  $e \cdot \cos \vartheta - e \cdot \cos \alpha$  gesenkt. Wenn man daher die Bewegungswiderstände der Glocke und auch die zu deren Überwindung aufzuwendende Triebkraft vernachlässigt, so ist nach dem Satze der Arbeit (S. 204)

$$6) \quad \omega^2 \frac{J}{2} = M \cdot g \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha)$$

und die Winkelbeschleunigung

$$7) \quad \varepsilon = \frac{M \cdot g \cdot y_0}{J} = \frac{M \cdot g \cdot e \cdot \sin \vartheta}{J}.$$

Führt man noch mit  $J = M \cdot i^2$  den Trägheitshalbmesser  $i$  der Glocke ein, so ergibt sich

$$\omega^2 = 2 \frac{M \cdot e}{J} g (\cos \vartheta - \cos \alpha) = \frac{2 e g}{i^2} (\cos \vartheta - \cos \alpha),$$

$$\varepsilon = \frac{M \cdot e}{J} \cdot g \cdot \sin \vartheta = \frac{e \cdot g}{i^2} \sin \vartheta,$$

und hiermit wird aus den Gl. 4 und 5

$$8) \quad H = Mg \frac{e^2}{i^2} (3 \sin \vartheta \cos \vartheta - 2 \cos \alpha \sin \vartheta),$$

$$9) \quad V = Mg \left( 1 + \frac{e^2}{i^2} [3 \cos^2 \vartheta - 2 \cos \alpha \cos \vartheta - 1] \right).$$

Die Grösse des wagerechten Widerstandes  $H$  wird zu Null für  $\vartheta = 0$ , d. h. für die tiefste Stellung der Glocke und für

$\cos \vartheta = \frac{2}{3} \cos \alpha$ , was nur bei  $\alpha > 90^\circ$  Sinn hat.  $H$  wechselt selbstverständlich sein Vorzeichen übereinstimmend mit  $\vartheta$ , ist also bald nach rechts, bald nach links gerichtet. Wichtig ist die Kenntnis des Grösstwerthes von  $H$ ; diesen findet man leicht durch Nullsetzung der ersten Abgeleiteten von Gl. 8 nach  $\vartheta$ , d. h.

$$3 \cos^2 \vartheta - 3 \sin^2 \vartheta - 2 \cos \vartheta \cos \alpha = 0,$$

woraus mit  $\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta$  schliesslich sich ergibt:

$$10) \quad \cos \vartheta_1 = \frac{1}{6} \cos \alpha \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{\cos \alpha}{6}\right)^2}.$$

Die äussersten Werthe von  $V$  ergeben sich für

$$-6 \cos \vartheta \sin \vartheta + 2 \cos \alpha \sin \vartheta = 0;$$

d. h. für  $\sin \vartheta = 0$ , oder  $\vartheta = 0$  entsteht  $V_{max}$ ,

für  $\cos \vartheta = \frac{1}{3} \cos \alpha$  entsteht  $V_{min}$ .

Die Einsetzung dieser Werthe in Gl. 9 liefert

$$11) \quad V_{max} = Mg \left( 1 + 2 \frac{e^2}{i^2} [1 - \cos \alpha] \right),$$

$$12) \quad V_{min} = Mg \left( 1 - \frac{e^2}{i^2} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{3} \right] \right).$$

Für die Berechnung der Grösstwerthe von  $H$  und  $V$  ist besonders die Kenntnis der Grössen  $e$  und  $i$  erforderlich. Ist nun Fig. 162 der Querschnitt der Glocke und  $AX$  die Drehachse, so kann man sich die Glocke in sehr viele wagerechte Ringe zerlegt denken. Ein solcher Ring habe den inneren und äusseren Halbmesser  $x_1$  bzw.  $x_2$ , die Höhe  $dz$ , den Abstand  $z$  von der  $AX$ . Dann liefert dieser Ring zum statischen Momente  $\mathcal{S}$  den Beitrag

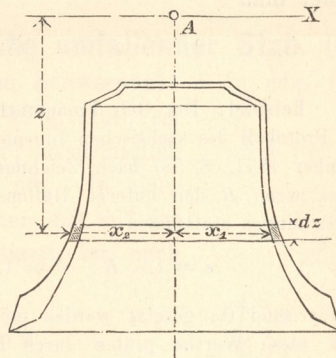
$$d\mathcal{S} = \frac{\gamma}{g} (x_2^2 - x_1^2) \pi \cdot dz \cdot z;$$

das statische Moment der metallenen Glocke ist also

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \pi \Sigma (x_2^2 - x_1^2) z \cdot dz$$

( $\gamma$  das Gewicht von 1 <sup>cbm</sup> Glockenmetall); dazu kommt noch das statische Moment des (gewöhnlich) hölzernen Helmes der Glocke,

Fig. 162.



welches sich bei gegebenen Abmessungen leicht berechnen lässt. Bezeichnet man dies mit  $\mathfrak{S}_h$ , so ist das ganze statische Moment der Glocke

$$13) \quad \mathfrak{S} = \frac{\gamma}{g} \pi \Sigma (x_2^2 - x_1^2) z \cdot dz + \mathfrak{S}_h.$$

$\mathfrak{S}_h$  wird übrigens  $< 0$ , da der Helm (Fig. 160) grösstentheils oberhalb der Achse  $AX$  liegt. Offenbar ist das Gewicht

$$Mg = \gamma \pi \Sigma (x_2^2 - x_1^2) dz + M_h \cdot g,$$

wenn  $M_h g$  das Gewicht des Helmes bedeutet. Dann findet sich leicht

$$14) \quad e = \frac{\mathfrak{S}}{M}.$$

Das polare Trägheitsmoment des Ringes ist

$$^{1/2} (x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz,$$

das Durchmesser-Trägheitsmoment mithin

$$^{1/4} (x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz$$

und dasjenige in Bezug auf die  $AX$ :

$$^{1/4} (x_2^4 - x_1^4) \pi \cdot dz + (x_2^2 - x_1^2) \pi \cdot dz \cdot z^2. \text{ Daher wird}$$

$$15) \quad J_x = \frac{\gamma}{g} \cdot \pi \left\{ \Sigma \frac{1}{4} (x_2^4 - x_1^4) \cdot dz + \Sigma (x_2^2 - x_1^2) z^2 \cdot dz \right\} + J_h,$$

wenn  $J_h$  das Trägheitsmoment des Helmes bedeutet. Hiernach findet man

$$16) \quad i^2 = \frac{J_x}{M}.$$

**Beispiel:** Der Geh. Finanzrath Köpcke zu Dresden hat im Jahre 1871 (s. Protokoll des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins vom 18. November 1871, S. 58) nach Zeichnungen und ausgeführten Glocken ermittelt, dass, wenn  $R$  den unteren Halbmesser der Glocke bezeichnet, etwa folgende Beziehungen stattfinden:

$$17) \quad e = 1,225 R; \quad i^2 = 1,895 R^2; \quad \text{also} \quad \frac{e^2}{i^2} = 0,7919,$$

wofür rund 0,8 gesetzt werden möge. An einer vorhandenen Glocke lassen sich diese Werthe prüfen durch Beobachtung der Schwingungsdauer  $t$  und Herleitung der Schwingungslänge  $l$  aus dieser. Es ist nämlich für die Glocke als Pendel (nach 1. Theil, S. 279)

$$18) \quad l = \frac{J}{M \cdot e} = \frac{i^2}{e} = \frac{1,895}{1,225} R = 1,547 R;$$

dies muss  $= \frac{g t^2}{\pi^2}$  oder rund  $= t^2$  sein (weil  $g$  nahezu  $= \pi^2$  ist).

Nimmt man noch an, dass die Mittellinie der Glocke beim grössten Ausschlage sich um  $20^\circ$  über die Wagerechte erhebe, dass also  $\alpha = 110^\circ$  sei, so wird nach Gl. 10 mit  $\cos \alpha = -0,342$ :

$$\cos \vartheta_1 = -0,057 \pm \sqrt{0,5 + 0,057^2} = 0,652 \text{ und } -0,766.$$

Dem entsprechen  $\vartheta_1 = 49^\circ 18'$  mit  $\sin \vartheta_1 = 0,758$ , sowie  $\vartheta_1 = 130^\circ$ , welcher letztere Werth hier aber keine Bedeutung hat, da er wegen  $\alpha = 110^\circ$  nicht vorkommt. Mit  $\vartheta_1 = 49^\circ 18'$  wird dann aus Gl. 8:

$$H_{max} = Mg \cdot 0,8 (3 \cdot 0,758 \cdot 0,652 + 2 \cdot 0,342 \cdot 0,758) = 1,60 \cdot Mg.$$

Für  $\vartheta = 0$ , d. h. in der tiefsten Lage der Glocke entsteht (Gl. 11)

$$V_{max} = Mg \cdot (1 + 2 \cdot 0,8 [1 + 0,342]) = 3,147 Mg;$$

für  $\cos \vartheta_2 = \frac{1}{3} \cos \alpha = -0,114$ , d. h.  $\vartheta_2 = 96^\circ 33'$  entsteht (Gl. 12)

$$V_{min} = Mg (1 - 0,8 [1 + 0,039]) = 0,17 Mg.$$

Bei heftigerem Läuten, d. h. grösserem Winkel  $\alpha$  würde  $V_{min}$  selbst  $< 0$  werden können; bleiben die Verhältnisse der Glocke im Übrigen ungeändert, so erfolgt dies für  $\cos \alpha < -0,866$  oder  $\alpha > 150^\circ$ . Bei so grossem Schwingungswinkel würde  $V_{min} < 0$  werden, d. h. die Glocke das Bestreben haben, aus den Lagern zu springen.

Wegen des starken Wechsels der Kraftgrössen empfiehlt es sich, die einzelnen Theile des Glockenstuhles so zu bemessen, dass die bei einer statischen Berechnung auf Grund obiger Kräfte entstehenden Spannungen  $\sigma$  ein Drittel der Spannungen an der Elasticitätsgrenze nicht überschreiten; für Stabeisen wäre etwa  $\sigma = 500 \text{ kg/qcm}$  zu setzen. Die gedrückten Theile sollen mindestens 7fache Sicherheit gegen Zerknicken haben.

Bezüglich der Bedingungen für ein gutes Anschlagen des Klöppels möge auf die Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1877, S. 151 verwiesen werden.

## 6. Aus lothrechter Stellung umfallender Stab.

Der stabförmige Körper, dessen Schwerpunkt  $S$  in dem Abstand  $e$  vom unteren Ende  $A$  liegt (Fig. 163), sei um das untere Ende drehbar, ursprünglich nahezu lothrecht gestellt und falle um. In einer beliebigen Zwischenstellung, in welcher  $AS$  mit der Lothrechten den Winkel  $\vartheta$  einschliesst, ist nach S. 204 die Winkelbeschleunigung

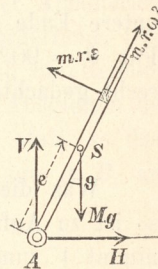
$$1) \quad \varepsilon = \frac{Mge \sin \vartheta}{J} = g \frac{e}{i^2} \sin \vartheta,$$

und für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gilt

$$\omega^2 \frac{J}{2} = Mge (1 - \cos \vartheta), \text{ also}$$

$$2) \quad \omega^2 = 2g \frac{e}{i^2} (1 - \cos \vartheta).$$

Fig. 163.





Die Widerstände  $H$  und  $V$ , welche der untere Drehpunkt  $A$  im Sinne der Fig. 163 leisten muss, bestimmen sich in der bei dem vorigen Beispiele gezeigten Weise leicht zu

$$H = M \cdot e \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta - M \cdot e \cdot \omega^2 \sin \vartheta \quad \text{und}$$

$$V = Mg - M e \varepsilon \sin \vartheta - M e \omega^2 \cos \vartheta,$$

oder mittels der Gl. 1 und 2 zu

$$3) \quad H = Mg \frac{e^2}{i^2} \sin \vartheta (3 \cos \vartheta - 2) \quad \text{und}$$

$$4) \quad V = Mg \left( 1 - \frac{e^2}{i^2} [1 + 2 \cos \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta] \right).$$

Der Werth von  $H$  ist zu Anfang, d. h. für  $\vartheta = 0$ , ebenfalls Null; er wird wiederum zu Null für  $\cos \vartheta = 2/3$ , d. h. für  $\vartheta = 48^\circ$  (vergl. 1. Theil, S. 74). Für  $\vartheta < 48^\circ$  ist  $\cos \vartheta > 2/3$  und  $H > 0$ , d. h. (Fig. 163) nach derjenigen Seite gerichtet, nach welcher die Stange umfällt. Es hat also, wenn die Stange nach rechts umfällt, das untere Ende derselben anfänglich das Bestreben nach links auszugleiten. Zwischen den beiden Nullwerthen von  $H$  liegt ein Maximum für einen Werth von  $\cos \vartheta$ , den man leicht durch Nullsetzung der ersten Abgeleiteten von Gl. 3 nach  $\vartheta$  ermittelt zu

$$\cos \vartheta = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = 0,8933 \quad \text{mit} \quad \vartheta = 26^\circ 40'$$

(ein  $\cos \vartheta < 0$  hat hier keinen Sinn); der entsprechende Werth von  $H$  selbst ergibt sich dann zu

$$H_{max} = Mg \frac{e^2}{i^2} \cdot 0,305.$$

Für  $\vartheta > 48^\circ$  ist  $\cos \vartheta < 2/3$  und  $H < 0$ ; es hat nunmehr das untere Ende der Stange das Bestreben, nach rechts auszugleiten. Für  $\vartheta = 90^\circ$ , d. h. beim Aufschlagen der Stange auf den waagrecht gedachten Boden ist

$$H = - 2 Mg \frac{e^2}{i^2}.$$

Was die Grösse des lothrechten Widerstandes  $V$  anlangt, so ist zu Anfang, d. h. für  $\vartheta = 0$ ,  $V = Mg$ . Mit wachsendem  $\vartheta$  nimmt  $V$  zunächst ab. Ein Kleinstwerth von  $V$  ergibt sich leicht für  $\cos \vartheta = 1/3$  oder  $\vartheta = 70^\circ 30'$ , nämlich

$$V_{min} = Mg \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{e^2}{i^2} \right).$$

Dann nimmt  $V$  wieder zu, und für  $\vartheta = 90^\circ$  wird

$$V = Mg \left( 1 - \frac{e^2}{i^2} \right).$$

Der in vorstehenden Gleichungen auftretende Werth  $\frac{e^2}{i^2}$ , gleichbedeutend mit  $\frac{e}{l}$  (vergl. S. 208, Gl. 18), wenn  $l$  die Schwingungslänge des am unteren Ende  $A$  aufgehängten Stabes ist, richtet sich nach der Massenvertheilung des Stabes. Ist die Masse gleichmässig über die Länge  $a$  vertheilt, so ist

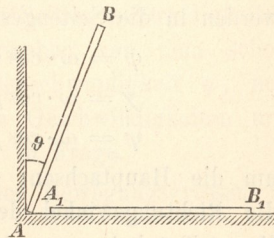
$$e = \frac{a}{2}, \quad i^2 = \frac{a^2}{3}, \quad l = \frac{2}{3}a, \quad \text{daher} \quad \frac{e^2}{i^2} = \frac{e}{l} = \frac{3}{4},$$

womit man für  $H$  und  $V$  leicht bestimmtere Ausdrücke aus vorstehenden Gleichungen erhält. Dieselben Werthe gelten offenbar für eine rechteckige, lothrecht aufgestellte, um die Unterkante drehbare Platte von gleichmässiger Gewichtsvertheilung.

Ist die Anordnung so getroffen, dass durch einen Vorsprung oder eine lothrechte Wand wohl ein Ausgleiten des unteren Endes nach links, nicht aber nach rechts verhindert wird (Fig. 164), so gelten die vorstehend entwickelten

Gleichungen nur bis zu dem Drehungswinkel  $\vartheta = 48^\circ$  und vermöge des in Wirklichkeit meist auftretenden Reibungswiderstandes noch um ein gewisses Mafß darüber hinaus. Bei weiterer Annäherung des Körpers an den wagerechten Boden kann die erforderliche, jetzt negative, d. h. nach links gerichtete Kraft  $H$  durch die Reibung nicht mehr geliefert werden, und es findet nun ein Ausgleiten des unteren Endes der Stange nach rechts hin wirklich statt, so dass der umgefallene Körper sich schliesslich in einer Lage  $A_1B_1$  auf dem Boden findet. Weiteres s. S. 233.

Fig. 164.



## 7. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Ein Körper drehe sich unter Einwirkung äusserer Kräfte um einen festen Punkt  $A$ , dann lässt sich nach S. 23 seine Bewegung

in jedem Zeitpunkte zurückführen auf die Drehung um eine durch den Punkt  $A$  gehende augenblickliche Drehachse  $AP$ . Es wird nun

1. der Körper seine Lage im Raume ändern;
2. die augenblickliche Drehachse ihre Lage sowohl im Raume wie auch gegen den Körper ändern;
3. wird auch die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  eine Grössenänderung erfahren.

Die drei Hauptachsen des Körpers für den Punkt  $A$  seien bekannt; dieselben liegen gegen den Körper fest, werden daher ihre Richtung im Raum ändern.

Wir denken uns durch den festen Punkt  $A$  (Fig. 165) drei feste Achsen gelegt, die so gewählt sind, dass sie im Zeitpunkte  $t$  mit den Hauptachsen zusammenfallen. Die diesem Zeitpunkte entsprechende Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  kann nach S. 35 (genau wie eine Kraft) zerlegt werden in die Seitengeschwindigkeiten

$$\varphi = \omega \cdot \cos \alpha;$$

$$\chi = \omega \cdot \cos \beta;$$

$$\psi = \omega \cdot \cos \gamma$$

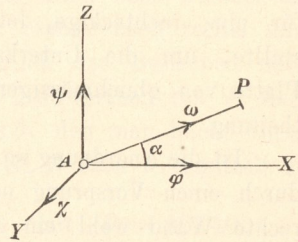
um die Hauptachsen;  $\alpha, \beta, \gamma$  seien

die Richtungswinkel der  $AP$ ; ferner seien  $J_1, J_2, J_3$  die drei Haupt-Trägheitsmomente,  $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$  die Momentensummen der äusseren Kräfte in Bezug auf die Hauptachsen.

Um die Beziehung zwischen der Drehbewegung um den festen Punkt  $A$  und den äusseren Kräften zu erhalten, wendet man den Satz von der Momentensumme der Bewegungsgrössen an. Daher bestimmen wir diese Momentensummen zunächst für den Zeitpunkte  $t$ , sodann für den Zeitpunkte  $t + dt$  und setzen die auf die Zeiteinheit bezogenen Zunahmen dieser Grössen gleich den entsprechenden Kraftmomenten.

Um die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die  $x$ -Achse zu finden, bedenke man, dass ein Massenpunkt  $m$  (Fig. 166) mit den Koordinaten  $x, y, z$  und einem Abstand  $r_1$  von der  $x$ -Achse wegen der Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$  um die  $x$ -Achse eine Geschwindigkeit  $\varphi \cdot r_1$  mit dem Hebelarme  $r_1$ , also ein Moment der Bewegungsgrösse  $m \cdot \varphi \cdot r_1^2$  hat. Ist  $r_2$  der rechtwinklige

Fig. 165.



Abstand des Massenpunktes von der  $y$ -Achse (Fig. 167), so entspricht der Winkelgeschwindigkeit  $\chi$  um die  $y$ -Achse eine Geschwindigkeit  $\chi \cdot r_2$ , welche sich leicht in  $\chi \cdot z$  und  $-\chi \cdot x$  im Sinne der  $x$ - bzw.  $z$ -Achse zerlegen lässt. Ebenso erhält man wegen der Winkelgeschwindigkeit  $\psi$  um die  $z$ -Achse die Seitengeschwindigkeiten

Fig. 166.

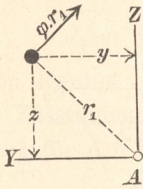


Fig. 167.

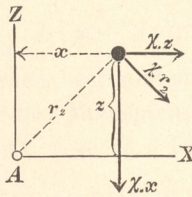
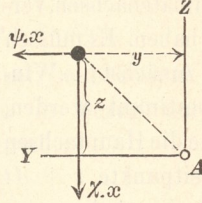


Fig. 168.



$-\psi \cdot y$  und  $+\psi \cdot x$  im Sinne der  $x$ - bzw. der  $y$ -Achse. Zu dem Momente der Bewegungsgröße in Bezug auf die  $x$ -Achse liefern die parallel der  $x$ -Achse gerichteten Seitengeschwindigkeiten keinen Beitrag; es kommen daher, abgesehen von dem schon erledigten Beitrage  $m\varphi \cdot r_1^2$  der Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$ , nur noch die beiden in Fig. 168 angegebenen Geschwindigkeiten mit den Momenten  $-\chi \cdot x \cdot y$  und  $-\psi \cdot x \cdot z$  in Frage.

Sonach wird die Momentensumme der Bewegungsgrößen in Bezug auf die  $x$ -Achse im Zeitpunkte  $t$ :

$$\Sigma(m\varphi \cdot r_1^2) - \Sigma(m \cdot \chi \cdot x \cdot y) - \Sigma(m \cdot \psi \cdot x \cdot z).$$

Da nun die Winkelgeschwindigkeiten  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  für diese Summen konstante Faktoren sind und da  $\Sigma(m \cdot r_1^2)$  das Trägheitsmoment  $J_1$  bedeutet, so wird obige Momentensumme

$$J_1 \cdot \varphi - \chi \Sigma mxy - \psi \Sigma mxz.$$

Weil aber in Bezug auf die Hauptachsen die Centrifugalmomente gleich Null sind, so vereinfacht sich obige Momentensumme zu

$$J_1 \cdot \varphi.$$

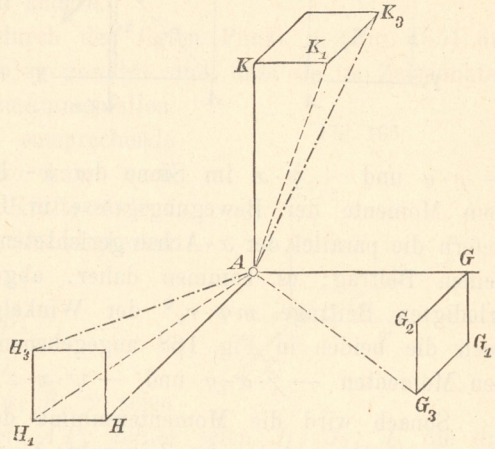
Ebenso werden für den Zeitpunkt  $t$  die Momentensummen der Bewegungsgrößen in Bezug auf die anderen beiden Achsen

$$J_2 \cdot \chi \quad \text{und} \quad J_3 \cdot \psi.$$

Zur Ermittlung der entsprechenden Momentensummen für den Zeitpunkt  $t + dt$  darf man nun nicht etwa in dem Ausdruck  $J_1 \cdot \varphi$

einfach  $\varphi$  mit  $\varphi + d\varphi$  vertauschen. Wohl ist  $J_1(\varphi + d\varphi)$  die Momentensumme der Bewegungsgrößen in Bezug auf die erste Hauptachse; jedoch ist zu bedenken, dass der hier in Frage kommende Satz in Bezug auf Achsen unveränderlicher Richtung, z. B. die festen Koordinatenachsen, gilt, dass die Hauptachsen des Körpers sich aber während der Zeit  $dt$  um gewisse, wenn auch unendlich kleine, Winkel gegen ihre ursprüngliche Richtung, d. h. gegen die festen Koordinatenachsen, verdreht haben. Es müssen daher zunächst die Winkel bestimmt werden, welche die Hauptachsen im Zeitpunkte  $t + dt$  mit der  $x$ -Achse einschliessen.

Zu dem Ende denken wir uns auf den Hauptachsen, welche im Zeitpunkte  $t$  noch mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, die Längen  $AG = AH = AK = 1$  abgetragen (Fig. 169).



Vermöge der Winkelgeschwindigkeit  $\chi$  um die  $AY$  bewegt sich  $G$  nach  $G_1$  um  $GG_1 = \chi \cdot dt$ . Vermöge der Winkelgeschwindigkeit  $\psi$  um die  $AZ$  bewegt sich  $G$  um  $GG_2 = \psi \cdot dt$ . Die Folge beider Geschwindigkeiten ist eine Verrückung des Punktes  $G$  nach  $G_3$ , d. h. eine Verdrehung der ersten Hauptachse um den Winkel

$$GAG_3 = dt\sqrt{\chi^2 + \psi^2}.$$

Die zweite Hauptachse schliesst Anfangs mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  ein. Dieser Winkel wird nicht geändert durch die Drehung um  $AX$  und um  $AY$ , sondern nur durch die Drehung um  $AZ$ , so dass im Zeitpunkte  $t + dt$  die zweite Hauptachse mit der  $x$ -Achse den Winkel  $H_3AG = \frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt$  einschliesst.

Der Winkel der dritten Hauptachse gegen  $AX$  wird nur durch die Winkelgeschwindigkeit  $\chi$  verändert und geht in

$$K_3 AG = \frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt$$

über. Multiplicirt man die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die drei Hauptachsen für den Zeitpunkt  $t + dt$ , also

$$J_1(\varphi + d\varphi), \quad J_2(\chi + d\chi), \quad J_3(\psi + d\psi),$$

mit den Kosinus der soeben bestimmten Winkel, so bekommt man durch Zusammenzählen die Momentensumme in Bezug auf die  $x$ -Achse für den Zeitpunkt  $t + dt$ . Dies ergibt:

$$\begin{aligned} J_1(\varphi + d\varphi) \cdot \cos(dt\sqrt{\chi^2 + \psi^2}) \\ + J_2(\chi + d\chi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt\right) \\ + J_3(\psi + d\psi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt\right). \end{aligned}$$

Weil aber  $\cos(dt \cdot \sqrt{\chi^2 + \psi^2}) = 1,$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt\right) = -\sin(\psi \cdot dt) = -\psi \cdot dt,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt\right) = \sin(\chi \cdot dt) = \chi \cdot dt$$

ist, so entsteht

$$J_1(\varphi + d\varphi) - J_2(\chi + d\chi)\psi \cdot dt + J_3(\psi + d\psi) \cdot \chi \cdot dt.$$

Zieht man hiervon ab die anfängliche Momentensumme  $J_1\varphi_1$ , vernachlässigt die Unendlichkleinen zweiter Ordnung und theilt schliesslich durch  $dt$ , so ergibt sich

$$J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - J_2 \cdot \chi \cdot \psi + J_3 \cdot \chi \cdot \psi$$

als Zunahme der Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die  $x$ -Achse für die Zeiteinheit, welche nach S. 193 gleich der Momentensumme  $\mathfrak{M}_x$  der äusseren Kräfte ist. Somit hat man die Gleichung

$$1) \quad J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - (J_2 - J_3)\chi \cdot \psi = \mathfrak{M}_x.$$

Ebenso folgt für die anderen Achsen

$$2) \quad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} - (J_3 - J_1) \psi \cdot \varphi = \mathfrak{M}_y,$$

$$3) \quad J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2) \cdot \varphi \cdot \chi = \mathfrak{M}_z.$$

Dies sind die von Leonhard Euler im Jahre 1758 entwickelten Gleichungen für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

### 8. Bewegung des Kreisels.

Unter einem Kreisel denken wir uns einen Körper, bestehend aus einer Achse mit einem darauf befestigten Schwungringe. Dem Körper werde eine bedeutende Winkelgeschwindigkeit  $\varphi_0$  um seine zunächst festgehaltene Achse ertheilt; setzt man ihn dann in beliebig schiefer Lage mit dem unteren Ende  $A$  der Achse in ein Kugellager, welches den Punkt  $A$  (nahezu) unbeweglich macht, oder befand er sich schon, bevor er in Drehung versetzt wurde, in einem solchen (Fig. 170), so fällt der Kreisel unter Einwirkung der Schwere nicht etwa um, wie es ohne die Drehung geschehen würde, vielmehr beschreibt die geometrische Achse des Kreisels bekanntlich eine Kegelfläche, deren Achse die durch  $A$  gelegte Lothrechte ist, wobei aber die Leitlinie nicht ein Kreis, sondern eine von zwei concentrischen Kreisen eingeschlossene, epicykloidenartige Kurve ist. Dies ergibt sich wie folgt:

Die geometrische Achse ist offenbar eine Hauptachse des Kreisels für den Punkt  $A$  und werde zur  $x$ -Achse genommen. Jede durch  $A$  rechtwinklig zur  $x$ -Achse gelegte Gerade ist ebenfalls eine Hauptachse. Wählt man die durch  $AX$  bestimmte lothrechte Ebene zur  $xz$ -Ebene, so liegen hierdurch die Achsen  $AZ$  und  $AY$  fest; letztere ist in Fig. 171 rechtwinklig zur Bildebene zu denken. Die Lothrechte durch den Punkt  $A$  werde

Fig. 170.

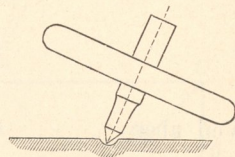
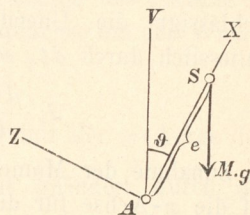


Fig. 171.



$AV$  genannt; sie schliesse mit  $AX$  den veränderlichen Winkel  $\vartheta$  ein. Da wegen der regelmässigen Gestalt des Kreisels das Trägheits-Ellipsoid für den Punkt  $A$  offenbar ein Umdrehungs-Ellipsoid, so ist  $J_3 = J_2$ .

Die Winkelgeschwindigkeiten sind

im Zeitpunkte  $t = 0$ :  $\varphi_0, \chi_0 = 0, \psi_0 = 0,$

im Zeitpunkte  $t$ :  $\varphi, \chi, \psi.$

Die Kraftmomente rühren, wenn man die Reibung im Kugellager vernachlässigt, nur vom Gewichte her; dann ist

$$\mathfrak{M}_x = 0; \quad \mathfrak{M}_y = M \cdot g \cdot e \sin \vartheta; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Hiernach wird aus den Euler'schen Gleichungen 1 bis 3, S. 215/6:

$$1) \quad J_1 \frac{d\varphi}{dt} = 0;$$

$$2) \quad J_2 \frac{d\chi}{dt} - (J_2 - J_1) \varphi \cdot \psi = M g e \sin \vartheta;$$

$$3) \quad J_2 \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2) \varphi \cdot \chi = 0.$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen folgen wir im Wesentlichen Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1. Aufl., S. 831.

Nach der ersten Gleichung ist  $\varphi$  unveränderlich, d. h.

$$4) \quad \varphi = \varphi_0.$$

Aus den Annahmen ergibt sich unmittelbar

$$5) \quad \chi = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Multipliziert man Gl. 2 mit  $\chi \cdot dt = d\vartheta$  und Gl. 3 mit  $\psi \cdot dt$ , so entsteht

$$J_2 \chi \cdot d\chi - (J_2 - J_1) \varphi \cdot \chi \cdot \psi \cdot dt = M g e \sin \vartheta \cdot d\vartheta,$$

$$J_2 \psi \cdot d\psi - (J_1 - J_2) \varphi \cdot \chi \cdot \psi \cdot dt = 0.$$

Daraus wird durch zusammenzählen:

$$J_2 (\chi \cdot d\chi + \psi \cdot d\psi) = M g e \sin \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Integriert man dies zwischen den Grenzen

$$\chi = 0, \quad \psi = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \text{ und}$$

$$\chi, \quad \psi, \quad \vartheta, \text{ so wird}$$

$$6) \quad J_2 (\chi^2 + \psi^2) = 2 M g e (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta).$$



In Bezug auf die drei Koordinatenachsen, welche im Zeitpunkt  $t$  mit den Hauptachsen zusammenfallen (vergl. S. 212), ist die Momentensumme der Bewegungsgrößen bezw.

$$J_1 \varphi = J_1 \varphi_0; \quad J_2 \cdot \chi; \quad J_2 \cdot \psi.$$

Projiciren wir diese Strecken auf die Lothrechte  $AV$ , so ist die Summe dieser Projektionen die Momentensumme der Bewegungsgrößen in Bezug auf  $AV$ . Dies giebt

$$J_1 \varphi_0 \cdot \cos \vartheta + J_2 \psi \cdot \sin \vartheta.$$

Dieser Werth muss, weil  $M \cdot g \parallel AV$ , d. h. das Kraftmoment in Bezug auf  $AV$  Null ist, nach S. 193 unveränderlich, also gleich seinem Anfangswerthe sein. Sonach wird

$$J_1 \varphi_0 \cos \vartheta + J_2 \psi \cdot \sin \vartheta = J_1 \varphi_0 \cos \vartheta_0, \quad \text{oder}$$

$$7) \quad J_1 \varphi_0 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) = J_2 \psi \cdot \sin \vartheta.$$

Aus den Gl. 6 und 7 lässt sich  $\psi$  entfernen und  $\chi$  berechnen, nämlich

$$8) \quad \chi = \pm \frac{1}{\sqrt{J_2}} \sqrt{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \left( 2 M g e - \frac{J_1^2 \varphi_0^2 \cdot \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{J_2 \sin^2 \vartheta} \right)}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist  $\vartheta$  die einzige Veränderliche. Da nun  $\chi$  nicht imaginär werden kann, wird sich  $\vartheta$  nur innerhalb solcher Werthe ändern können, für welche der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv bleibt; diejenigen Werthe von  $\vartheta$ , welche jenen zu Null machen, sind Grenzwerte. Einer dieser Grenzwerte ist nach Gl. 8 offenbar der Anfangswerth  $\vartheta = \vartheta_0$ . Ein anderer Grenzwert  $\vartheta_1$  ergibt sich, wenn man

$$2 M \cdot g \cdot e - \frac{J_1^2}{J_2} \varphi_0^2 \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_1} = 0$$

setzt, wofür man wegen  $\sin^2 \vartheta_1 = 1 - \cos^2 \vartheta_1$  auch schreiben kann:

$$9) \quad \frac{2 M \cdot g \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} (1 - \cos^2 \vartheta_1) = \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta_1.$$

Der Einfachheit wegen sollen im Weiteren nur solche Fälle berücksichtigt werden, in denen die anfängliche Winkelgeschwindigkeit  $\varphi_0$  sehr gross oder, bestimmter ausgedrückt, das ursprüngliche Arbeitsvermögen  $\frac{J_1 \varphi_0^2}{2}$  sehr gross im Vergleiche mit  $M g \cdot e \frac{J_2}{J_1}$  ist; dann wird die linke Seite der Gl. 9 sehr klein, mithin auch die rechte; d. h. die Grenzwerte  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  sind nur wenig von einander verschieden, oder  $\vartheta$  ändert sich nur wenig.

Wir schreiben daher

$$10) \quad \vartheta = \vartheta_0 + \delta,$$

worin für grosse Drehgeschwindigkeit des Kreisels  $\delta$  ein kleiner Winkel ist. Hiermit wird

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos(\vartheta_0 + \delta) = \cos \vartheta_0 \cdot \cos \delta - \sin \vartheta_0 \cdot \sin \delta \\ &= \cos \vartheta_0 - \delta \cdot \sin \vartheta_0 \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$11) \quad \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta = \delta \cdot \sin \vartheta_0.$$

Vertauscht man noch annäherungsweise  $\sin \vartheta$  mit dem Anfangswerth  $\sin \vartheta_0$ , so wird aus Gl. 8 unter Benutzung von Gl. 11:

$$12) \quad \chi = \pm \sqrt{2 \frac{Mg}{J_2} \cdot e \cdot \delta \cdot \sin \vartheta_0 - \frac{J_1^2}{J_2^2} \varphi_0^2 \delta^2}.$$

Nach Gl. 5 und 10 ist

$$13) \quad \chi = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\delta}{dt}.$$

Der grösste Werth  $\delta_1$  von  $\delta$  ergibt sich für  $\frac{d\delta}{dt} = 0$ , also für  $\chi = 0$  nach Gl. 12 zu

$$14) \quad \delta_1 = \frac{2 Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} \sin \vartheta_0 = \vartheta_1 - \vartheta_0.$$

Um zu erfahren, innerhalb welcher Zeit  $\vartheta$  von  $\vartheta_0$  in  $\vartheta_1$ , also  $\delta$  von 0 in  $\delta_1$  übergeht, muss man aus Gl. 13 und 12

$$dt = \frac{d\delta}{\chi} = \frac{d\delta}{\frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \sqrt{2 \frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} \delta - \delta^2}}$$

entnehmen und integrieren. Setzt man zur Abkürzung vorübergehend

$$\frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} = a, \quad \text{so wird}$$

$$dt = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \frac{d\delta}{\sqrt{2 a \delta - \delta^2}}.$$

Nun ist aber

$$d \arccos \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right) = - \frac{d \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right)^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \frac{d\delta}{\sqrt{2 \frac{\delta}{a} - \frac{\delta^2}{a^2}}} = \frac{d\delta}{\sqrt{2a\delta - \delta^2}}, \text{ also}$$

$$t = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right) + C, \text{ oder}$$

$$15) \quad t = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos \left( 1 - \frac{J_1^2 \varphi_0^2}{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0} \cdot \delta \right) + C.$$

Rechnet man die Zeit von dem Augenblick an, in welchem  $\delta = 0$  also  $\vartheta = \vartheta_0$  war, so wird

$$0 = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos 1 + C, \text{ d. h. } C = 0.$$

Löst man Gl. 15, mit  $C = 0$ , nach  $\delta$  auf, so entsteht

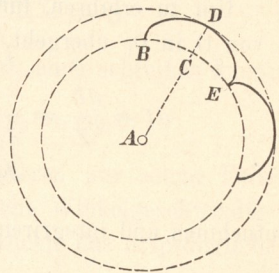
$$16) \quad \delta = \frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin \vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2} \left( 1 - \cos \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot t \right).$$

Diese Gleichung giebt  $\delta$  als  $f(t)$ ; jedes Mal wenn  $\frac{J_1}{J_2} \varphi_0 t$  sich um  $2\pi$  geändert hat, kehren für  $\delta$  dieselben Werthe wieder; in der Zeit

$$17) \quad t_1 = \frac{2\pi J_2}{\varphi_0 J_1}$$

wird also der Zwischenraum von  $\vartheta_0$  bis  $\vartheta_1$  ein Mal hin und her durchlaufen. Die Achse  $AX$  des Kreisels beschreibt also um die Lothrechte  $AV$  einen Kegel mit einer nach Fig. 172 geformten Leitlinie. — Fig. 172 sei der Grundriss der Bahnlinie des Kreiselschwerpunktes  $S$ . Die Grösse des Ausschlages  $CD$  in radialer Richtung ist durch  $\delta_1$  (Gl. 14) gegeben, die Zeit zum Durchlaufen eines Bogens  $BDE$  durch Gl. 17. Um auch noch die Länge  $BCE$  eines Bogens zu finden, müssen wir die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  berechnen, mit der sich die Ebene  $VAX$  (Fig. 171)

Fig. 172.



um  $AV$  dreht. Diese erhält man, indem man die Winkelgeschwindigkeit  $\psi$  um die Achse  $AZ$  zerlegt nach den Richtungen  $AV$  und  $AX$  (Fig. 173), dann ist die in erstere Richtung fallende Seitengeschwindigkeit der gesuchte Werth

$$\omega = \frac{\psi}{\sin \vartheta}.$$

Nun ist nach Gl. 7:

$$\psi = \frac{J_1}{J_2} \cdot \varphi_0 \frac{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}{\sin \vartheta},$$

also mittels Gl. 11, wenn man zugleich nach S. 219 wieder  $\sin \vartheta$  mit  $\sin \vartheta_0$  vertauscht,

$$\psi = \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot \delta, \quad \text{mithin}$$

$$18) \quad \omega = \frac{J_1}{J_2} \varphi_0 \cdot \frac{\delta}{\sin \vartheta_0}.$$

Da nun  $\delta$  von Null bis  $\delta_1$  schwankt, so ist auch  $\omega$  zwischen Null und einem Grösstwerthe (für  $\delta = \delta_1$ ) veränderlich. Einen Mittelwerth von  $\omega$  erhält man, wenn man für  $\delta$  den Mittelwerth

$$\frac{\delta_1}{2} = \frac{Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2} \sin \vartheta_0$$

(Gl. 14) einsetzt, nämlich

$$19) \quad \omega = \frac{Mg \cdot e}{J_1 \varphi_0}.$$

In der Zeit 
$$t_1 = \frac{2\pi J_2}{\varphi_0 J_1}$$

(Gl. 17) dreht sich die Ebene  $VAX$  also um den Winkel

$$\eta = \omega \cdot t_1 = 2\pi \frac{Mg \cdot e}{\varphi_0^2} \frac{J_2}{J_1^2},$$

wofür man nach Gl. 14 kürzer

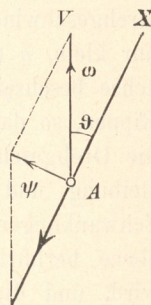
$$20) \quad \eta = \pi \frac{\delta_1}{\sin \vartheta_0}$$

schreiben kann. Auf eine Umdrehung der Ebene  $VAX$  kommen sonach

$$21) \quad n = \frac{2\pi}{\eta} = 2 \frac{\sin \vartheta_0}{\delta_1}$$

Schwankungen der Kreiselachse.

Fig. 173.



Die Zeit einer vollständigen Drehung der Ebene  $VAX$  beträgt

$$22) \quad t_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{J_1 \cdot \varphi_0}{Mg \cdot e},$$

wächst also verhältnissgleich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\varphi_0$  des Kreisels und ist unabhängig von dem Winkel  $\vartheta_0$ . Bei sehr grosser Drehgeschwindigkeit  $\varphi_0$  des Kreisels ist nach Gl. 14 der Winkel  $\delta_1$  nur klein,  $n$  (Gl. 21) gross und  $t_2$  (Gl. 22) gross, d. h. die Kreiselsachse beschreibt sehr langsam einen Kegel mit vielen aber kleinen Rippen, so dass der Kegel fast wie ein Kreiskegel erscheint. Wird die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um seine Achse in Folge von Reibung und Luftwiderstand allmählich kleiner, so werden die Schwankungen  $\delta_1$  grösser, bis der Kreisel schliesslich die Grundebene berührt und umfällt oder sonst in seiner Bewegung gestört wird, und die Zeit  $t_2$  einer Drehung der Ebene  $VAX$  verkleinert sich. Der Sinn der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  und  $\varphi_0$  (Gl. 19) stimmt in Bezug auf den Drehpunkt überein; ist  $\varphi_0$ , von oben betrachtet, rechts drehend, so gilt dies auch für  $\omega$ , und umgekehrt.

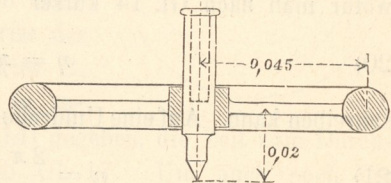
Über die Form der Kurve  $BDE$  (Fig. 172) erhält man noch bestimmteren Aufschluss, wenn man mittels der Gl. 12 und 18 bildet

$$\frac{\chi^2}{\omega^2} = \frac{2Mg \cdot e \cdot \sin^3 \vartheta_0 \cdot J_2}{J_1^2 \varphi_0^2 \delta} - \sin^2 \vartheta_0.$$

Für  $\delta = 0$  wird  $\frac{\chi^2}{\omega^2} = \infty$ , d. h. die Kurve  $BDE$  ist bei  $B$  und  $E$  radial; für  $\delta = \delta_1$  (Gl. 14) aber wird  $\frac{\chi^2}{\omega^2} = 0$ , d. h. die Kurve  $BDE$  ist bei  $D$  rechtwinklig zu  $AD$ . Weil  $AC = e \cdot \sin \vartheta_0$ , so ist  $BCE = AC \cdot \eta = e \cdot \delta_1 \cdot \pi$  (Gl. 20). Betrachtet man annähernd  $CD$  als  $= e \cdot \delta_1$ , so passt auch das Verhältnis  $BCE : CD = \pi$  auf eine sphärische Epicykloide, welche beim Rollen eines spitzen Kegels auf dem äusseren Mantel eines stumpferen entstehen würde.

**Beispiel:** Ein Kreisel (Fig. 173) bestehe aus einem Schwungringe von 0,045 m mittlerem Halbmesser, der so schwer ist, dass gegen seine Masse diejenige der Achse und der Radarme vernachlässigt werden kann. Die Spitze liege um 0,02 m unter der Mitte

Fig. 174.



des Schwungringes und sei in einem glatten Grübchen drehbar, so dass man ihre Bewegung als Drehung in einem Kugellager ansehen kann. Dann ist annähernd

$$J_1 = M \cdot 0,045^2 = 0,002 \cdot M,$$

$$J_2 = M \left( \frac{0,045^2}{2} + 0,02^2 \right) = 0,0014 \cdot M,$$

$$e = 0,02.$$

Für diesen Kreisel ist die Schwankung

$$(Gl. 14) \quad \delta_1 = \frac{2 M \cdot 9,81 \cdot 0,02 \cdot 0,0014 M \cdot \sin \vartheta_0}{\varphi_0^2 \cdot 0,002^2 \cdot M^2} = 137 \frac{\sin \vartheta_0}{\varphi_0^2};$$

die Zeit einer Hin- und Herschwankung

$$(Gl. 17) \quad \tau_1 = 2 \pi \frac{0,0014}{0,002 \cdot \varphi_0} = \frac{4,4}{\varphi_0};$$

die Zeit eines Umlaufes der Kreiselachse um die Lothrechte

$$(Gl. 22) \quad t_2 = 2 \pi \frac{0,002}{9,81 \cdot 0,02} \varphi_0 = 0,064 \varphi_0;$$

die Zahl der Schwankungen der Achse während eines Umlaufes, d. h. Zahl der Rippen des Kegels

$$(Gl. 21) \quad n = 2 \frac{\sin \vartheta_0}{137 \cdot \sin \vartheta_0} \cdot \varphi_0^2 = 0,015 \cdot \varphi_0^2.$$

Um die Achse des Kreisels sei eine Schnur gewickelt; die Mitte derselben sei von der Mittellinie der Achse um 4 mm entfernt, so dass eine Umwicklung einer Fadenlänge von rund 25 mm entspricht. Wird an dem freien Ende des Fadens mit möglichst gleich bleibender Kraft gezogen und zugleich die (hohle) Achse des Kreisels mittels eines hineingesteckten Stiftes festgehalten, so erfährt der Kreisel eine gleichförmig beschleunigte Drehbewegung. Werden bei dieser in einer Zeit von drei Sekunden 800 mm Fadenlänge abgezogen, so ist die Endgeschwindigkeit des Fadens (nach I. Theil, S. 12, Gl. 4, mit  $c=0$ )

$$v = \frac{2 \cdot 800}{3} = 533 \text{ mm/s.},$$

entsprechend einer Drehgeschwindigkeit von

$$\frac{533}{25} = 21$$

Umdrehungen in der Sekunde, oder einer Winkelgeschwindigkeit

$$\varphi_0 = 21 \cdot 2 \pi = 132.$$

Die Winkelbeschleunigung dieser Antriebbewegung ist

$$\varepsilon = \frac{\varphi_0}{t} = \frac{132}{3} = 44.$$

Hat der Kreisel ein Gewicht  $Mg = 0,3 \text{ kg}$ , so ist

$$J_1 = \frac{0,3}{9,81} \cdot 0,002;$$

somit erfordert  $\varepsilon$  ein Moment

$$\mathfrak{M} = \varepsilon \cdot J_1 = 0,0027 \text{ mkg},$$

also an einem Hebelarme von  $0,004 \text{ m}$  eine Zugkraft  $K = 0,7 \text{ kg}$ .

Aus  $\varphi_0 = 132$  folgt die Zeit einer Hin- und Herschwankung

$$t_1 = \frac{4,4}{132} = 0,033 \text{ s};$$

die Zeit eines Umlaufes der Kreiselachse  $t_2 = 0,064 \cdot 132 = 8,4 \text{ s}$ ; die Zahl der Rippen eines Kegels  $n = 0,015 \cdot 132^2 = 261,4$ . Einer Schrägstellung der Kreiselachse um den Winkel  $\vartheta_0 = 10^\circ$  mit  $\sin \vartheta_0 = 0,17$  entspricht dann

$$\delta_1 = \frac{137 \cdot 0,17}{132^2} = 0,0014 = 5'.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit  $\varphi_0$  nur halb so gross, wie vorstehend angenommen, so wird  $t_1$  doppelt so gross, d. h.  $0,066 \text{ s}$ ;  $t_2$  halb so gross, d. h.  $4,2 \text{ s}$ ; die Zahl  $n$  der Rippen vermindert sich auf ein Viertel, d. h. auf  $65,4$ ; während  $\delta_1$  auf das Vierfache, nämlich auf  $20'$  zunimmt.

## 9. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung bewegender Kräfte.

Der vorstehend behandelte Fall der Kreiselbewegung wurde dadurch verhältnismässig leicht lösbar, dass das Trägheits-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid war, dass ausserdem die Winkelgeschwindigkeit  $\varphi_0$  sehr gross, die anderen beiden  $\chi_0$  und  $\psi_0$  aber gleich Null vorausgesetzt wurden und dass die Achse des resultierenden Kräftepaares in eine Hauptachse fiel. Ohne diese vereinfachenden Annahmen wird die Aufgabe, die Drehbewegung eines Körpers um einen festen Punkt zu untersuchen, meist so schwierig, dass wir von deren allgemeiner Behandlung hier absehen.

Wirken auf den Körper ausser dem Widerstande des festen Punktes keine äusseren Kräfte, sind also die Drehmomente in Bezug auf alle durch den festen Punkt zu legende Achsen gleich Null, so nehmen die Euler'schen Drehgleichungen (S. 215/6) allerdings die etwas einfachere Gestalt

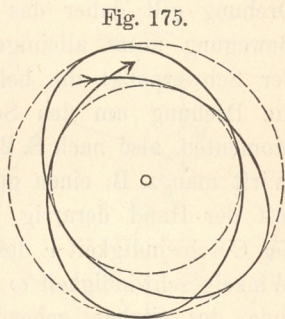
$$J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = (J_2 - J_3)\chi \cdot \psi, \quad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} = (J_3 - J_1)\psi \cdot \varphi,$$

$$J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} = (J_1 - J_2)\varphi \cdot \chi \quad \text{an.}$$

Die Entwicklung dieser Gleichungen, welche Poincot im Jahre 1834 gezeigt hat, soll hier nur in ihren Ergebnissen beschrieben werden.

Die Drehbewegung des Körpers um den festen Punkt  $A$  ohne Einwirkung von Kraftmomenten geschieht hiernach in der Weise, dass das auf den festen Punkt bezügliche Trägheits-Ellipsoid des Körpers eine Rollbewegung auf einer Ebene ausführt, die eine unveränderliche Lage hat. Die Lage dieser sog. unveränderlichen Ebene hängt von den anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten  $\varphi_0$ ,  $\chi_0$  und  $\psi_0$  um die Hauptachsen ab. Der Fahrstrahl, von dem festen Punkt  $A$  nach dem Berührungspunkt  $O$  zwischen der Ebene und dem Ellipsoide gezogen, ist die augenblickliche Drehachse, und zugleich ist die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um diese Achse mit der Länge des Fahrstrahles  $AO$  verhältnissgleich. Geschieht die anfängliche Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine der Hauptachsen des Trägheits-Ellipsoides, so ist der Fahrstrahl  $AO$  rechtwinklig zu der unveränderlichen Ebene; der Berührungspunkt  $O$  hat in diesem Fall eine feste Lage im Körper und im Raume; die Drehung erfolgt daher mit gleichbleibender Geschwindigkeit dauernd um die Achse  $AO$ , als wäre diese eine feste Achse.

Die Drehung um den festen Punkt  $A$  kann nach S. 24 auch als das Rollen zweier Kegel auf einander betrachtet werden. In dem hier vorliegenden Falle, wo die Momente Null sind, schneidet der mit dem Körper verbunden gedachte Kegel das um den Punkt  $A$  gelegte Trägheits-Ellipsoid in einer Kurve, deren Gleichung Ähnlichkeit mit der Ellipsengleichung hat. Der andere, unbewegliche, Kegel ist transcendenten Natur; er hat eine etwa nach Fig. 175 geformte Leitlinie (vergl. Budde, Allgemeine Mechanik, S. 833).



Ist das Trägheits-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid, so werden die auf einander rollenden Kegel beide zu Kreiskegeln.

Ist das Trägheits-Ellipsoid eine Kugel, so dass jede durch  $A$  gelegte Achse eine Hauptachse ist, so gehen die Kegel in eine einzige Gerade über; die Drehachse ändert dann ihre Richtung und ihre Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gar nicht. Dieses letzte Ergebnis folgt auch schon aus 1. Theil, S. 290.



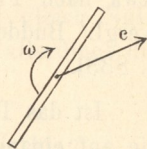
## 10. Bewegung eines freien Körpers.

Das vorstehend über die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt Mitgetheilte findet auch sinngemässe Anwendung auf die Bewegung eines freien Körpers. Vereinigt man nämlich die an einem starren Körper von der Masse  $M$  wirkenden äusseren Kräfte zu einer durch den Schwerpunkt  $S$  des Körpers gehenden Einzelkraft  $R$  und einem Achsenmoment  $\mathfrak{M}$ , so wird die Bewegung des Schwerpunktes  $S$  nach S. 170 nur durch die Kraft  $R$  beeinflusst; diese ertheilt dem Körper eine Verschiebungs-Beschleunigung

$$p = \frac{R}{M}$$

im Sinne der Kraft  $R$ . Ausser der Verschiebung mit dem Schwerpunkte führt der Körper im Allgemeinen noch eine Drehung um den Schwerpunkt aus, welche nach 1. Theil, S. 297 unabhängig von der Verschiebung so behandelt werden kann, als wäre der Schwerpunkt ein fester Punkt und als drehe sich der Körper um ihn unter Einwirkung des Moments  $\mathfrak{M}$ . Für diese Drehung gilt daher das S. 211 bis S. 224 Gesagte. Erfolgt die Bewegung unter alleiniger Einwirkung der Schwere, so beschreibt der Schwerpunkt die bekannte (1. Theil, S. 49) Wurfparabel, und die Drehung um den Schwerpunkt erfolgt ohne Einwirkung von Momenten, also nach S. 224 und 225 (vergl. auch 1. Theil, S. 297). Wirft man z. B. einen geraden Stab (eine materielle gerade Linie) mit der Hand derartig fort, dass der Stab ausser der Geschwindigkeit  $c$  des Schwerpunktes noch eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in einer durch die Mittellinie des Stabes gehenden Ebene, also um eine rechtwinklig zu dieser Mittellinie stehende Achse, bekommt (Fig. 176), so wird, wenn man vom Luftwiderstand absieht, die Geschwindigkeit  $c$  die parabolische Wurfbewegung des Schwerpunktes bedingen, die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  daneben aber unverändert erhalten bleiben. Steht die Achse der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  aber schief gegen den Stab, so wird die Drehung um den Schwerpunkt eine veränderliche, wirbelnde Bewegung sein.

Fig. 176.



## II. Schwingungen eines Schiffes.

Die lothrecht auf und nieder gehende Bewegung, das sog. Tauchen oder Steigen eines Schiffes wurde bereits S. 62/63 behandelt. Die Dauer einer einfachen Schwingung dieser Art ergab sich zu

$$1) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{V}{F \cdot g}},$$

entsprechend der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge

$$2) \quad l = \frac{V}{F} = t_1^2 \frac{g}{\pi^2} = 0,994 t_1^2,$$

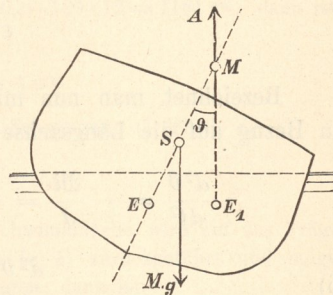
wenn  $V$  den Inhalt des eingetauchten Raumes im Gleichgewichtszustand,  $F$  den Inhalt der wagerechten Schwimmfläche bedeuten.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Rollen des Schiffes, worunter man eine Drehung um die zum Kiele parallele Schwerpunktsachse (Längsachse) versteht.

Ein aufrecht (gerade) schwimmendes Schiff werde durch vorübergehende Einwirkung eines Kräftepaares derartig in eine schräge Lage gebracht, dass die Querschnitte in ihrer ursprünglichen Ebene verbleiben, und stehe dann wieder unter alleiniger Wirkung des Gewichtes  $Mg$  und des ebenso grossen Auftriebes  $A = \gamma \cdot V = Mg$ , worin  $\gamma$  das Gewicht einer Raumeinheit des Wassers. Das Schiff sei von solcher Gestalt, dass auch die Richtungslinie des Auftriebes sich nur in der durch den Schwerpunkt  $S$  des Schiffes gelegten Querschnittsebene verschoben hat. Dann fällt die durch den Schwerpunkt  $S$  gelegte Achse des wirkenden Kräftepaares ( $Mg$  und  $A$ ) mit der Längsachse des Schiffes zusammen, welche annähernd als eine freie Achse angesehen werden möge.

Die Entfernung aus der Gleichgewichtslage werde als nur gering, der Neigungswinkel  $\vartheta$  (Fig. 177) als klein vorausgesetzt, dann schneidet nach 2. Theil, S. 191, der Auftrieb des Schiffes die

Fig. 177.



Schwimmachse  $ES$  desselben in einem festen Punkte, dem Metacentrum  $M$ , welches vom Schwerpunkte  $S$  um die metacentrische Höhe  $SM$  entfernt ist. Liegt der Schwerpunkt  $E$  des eingetauchten Raumes oder der Verdrängung  $V$  bei aufrechter Lage des Schiffes um

$$ES = e$$

unterhalb des Schwerpunktes  $S$  des Schiffes, so ist (2. Theil, S. 191, Gl. 5 u. 6)

$$3) \quad SM = \frac{\mathfrak{S}}{V} - e$$

und das aufrichtende Moment

$$4) \quad \mathfrak{M} = \gamma \cdot V \left( \frac{\mathfrak{S}}{V} - e \right) \vartheta,$$

worin  $\mathfrak{S}$  das Trägheitsmoment der Schwimmfläche (Fig. 178), in Bezug auf ihre Längsachse  $OX$  bedeutet. Bei der Rückkehr in die Gleichungslage verkleinert sich der Winkel  $\vartheta$ , es ist daher die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung

$$\omega = - \frac{d\vartheta}{dt},$$

die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = - \frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Bezeichnet man nun mit  $J$  das Trägheitsmoment des Schiffes in Bezug auf die Längsachse  $S$ , so ist (1. Theil, S. 276)

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = - \frac{\mathfrak{M}}{J} = - \frac{\gamma \cdot V}{J} \left( \frac{\mathfrak{S}}{V} - e \right) \vartheta, \quad \text{oder}$$

$$5) \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = - k^2 \cdot \vartheta,$$

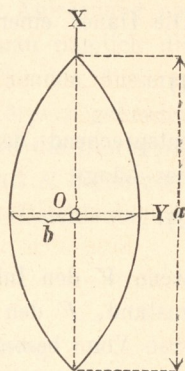
wenn man zur Abkürzung

$$6) \quad k^2 = \gamma \frac{\mathfrak{S} - e \cdot V}{J}$$

setzt. Nach S. 92/93 hat Gl. 5 die allgemeine Lösung

$$\vartheta = A \sin kt + B \cos kt.$$

Fig. 178.



Eine Zunahme von  $kt$  um  $2\pi$  führt das Schiff in den vorhergehenden Zustand zurück, daher entspricht die Zeit  $\frac{2\pi}{k}$  einer Doppelschwingung; die Dauer einer einfachen Schwingung ist also

$$7) \quad t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{J}{\gamma(\mathfrak{S} - e \cdot V)}},$$

und dies entspricht einer Schwingungslänge, die sich analog Gl. 2 ergibt zu

$$8) \quad l_1 = \frac{J \cdot g}{\gamma(\mathfrak{S} - e \cdot V)} = \frac{J}{M \cdot \overline{SM}} = \frac{i^2}{\overline{SM}},$$

wenn  $i$  der Trägheitshalbmesser.

Eine Schwingung um die Querachse des Schiffes wird das Stampfen genannt. Für die Dauer desselben gilt

$$9) \quad t_2 = \pi \sqrt{\frac{J_2}{\gamma(\mathfrak{S}_2 - e \cdot V)}},$$

wenn  $J_2$  das Trägheitsmoment des Schiffes in Bezug auf die Querachse,  $\mathfrak{S}_2$  das Trägheitsmoment der Schwimmfläche in Bezug auf die Querachse bezeichnen.

**Beispiel:** Ein Schiff von  $a = 120$  m Länge,  $b = 12$  m Breite,  $e = 8,5$  m Höhe wiege  $5845$  t, dann ist im Seewasser ( $\gamma = 1025$  kg)

$$V = \frac{5845}{1,025} = 5702 \text{ cbm.}$$

Die Schwimmfläche betrage  $F = 0,82 a \cdot b = 0,82 \cdot 120 \cdot 12 = 1181$  qm, dann ist die Schwingungslänge des Tauchens (Gl. 2)

$$l = \frac{V}{F} = \frac{5702}{1181} = 4,83 \text{ m}$$

und die entsprechende Dauer einer einfachen Schwingung (1. Theil, S. 78)

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1,003 \sqrt{l} = 2,2 \text{ s.}$$

Das geometrische Trägheitsmoment  $\mathfrak{S}$  der Schwimmfläche wird auf das Trägheitsmoment des umschliessenden Rechtecks ( $a \cdot b$ ) zurückgeführt und möge wegen der Zuschärfung 60 % desselben betragen; dann ist

$$\mathfrak{S} = 0,68 \cdot \frac{a b^3}{12} = \frac{0,68 \cdot 120 \cdot 12^3}{12} = 11750 \text{ m}^4.$$

Die Höhe des Schiffsschwerpunktes  $S$  über dem Schwerpunkt  $E$  der Verdrängung betrage  $e = 1,46$  m, dann wird die metacentrische Höhe

$$\overline{SM} = \frac{\mathfrak{S}}{V} - e = \frac{11750}{5702} - 1,46 = 0,6 \text{ m.}$$

Für das Trägheitsmoment  $J$  des beladenen Schiffes giebt es keine Annäherungsformeln; vielmehr muss man zu dessen unmittelbarer Bestimmung die

Masse eines jeden Theiles des Schiffes mit dem Quadrate seines Abstandes von der Schwerpunktsachse multipliciren und diese Produkte summiren. Gewöhnlich unterlässt man diese mühsame Rechnung, beobachtet vielmehr die Schwingungsdauer  $t_1$ , berechnet daraus die Schwingungslänge  $l_1$  und schliesslich nach Gl. 8 das Trägheitsmoment  $J$ .

Das vorliegende Schiff gebrauche zu einer einfachen Roll-Schwingung  $t_1 = 8$  s.; dem entspricht eine Schwingungslänge

$$l_1 = \frac{t_1^2}{1,003^2} = \frac{64}{1,003^2} = 63,62 \text{ m.}$$

Hiermit wird nach Gl. 8

$$i^2 = l_1 \cdot \overline{SM} = 63,62 \cdot 0,6 = 38,17 \quad \text{und} \quad i = 6,18 \text{ m.} \quad \text{Schliesslich}$$

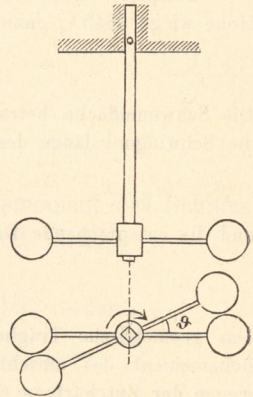
$$J = Mi^2 = \frac{5845 \cdot 1000}{g} \cdot 38,17 = 22\,743\,000.$$

## 12. Drehungspendel.

Ein elastischer, prismatischer Stab oder Draht sei an seinem oberen Ende fest eingespannt, auch gegen Drehung gesichert; an seinem unteren Ende sei ein Körper von solcher Massenvertheilung befestigt, dass die lothrechte Mittellinie des Stabes eine freie Achse des Körpers bilde (Fig. 179). Zu Anfang befinde sich das Ganze im Gleichgewichte. Wird nun der untere Körper um die lothrechte Achse gedreht, so entstehen in dem mitverdrehen Stabe Schubspannungen, die innerhalb der Elasticitätsgrenze mit dem Drehungswinkel verhältnissgleich sich ändern. Wird der Körper sodann losgelassen, so ertheilt das Spannungsmoment des Stabes dem Körper eine Winkelbeschleunigung, welche demnach verhältnissgleich ist der Winkelabweichung von der Gleichgewichtslage. Wird die Winkelabweichung für einen beliebigen Zeitpunkt mit  $\vartheta$  bezeichnet, so ist, weil die Bewegung eine rückläufige, die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$ , die Winkelbeschleunigung

$$1) \quad \varepsilon = -\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{M\vartheta}{J},$$

Fig. 179.



wenn  $\mathfrak{M}$  das mit  $\vartheta$  verhältnisgleiche Verdrehungs-,  $J$  das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die lothrechte Achse bezeichnen. Die einfache Gl. 1 für  $\varepsilon$  ist hier verwendbar, weil nur Winkelbeschleunigungen und Drehungen um eine freie Achse in Frage kommen, so dass (nach 1. Theil, S. 297) die Bewegung wie eine Drehung um eine feste lothrechte Achse geschehen muss.

Für Gl. 1 kann man schreiben:

$$2) \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -k^2 \cdot \vartheta; \quad \text{dann bedeutet}$$

$$3) \quad k^2 = \frac{\mathfrak{M}}{J\vartheta}$$

die Winkelbeschleunigung für einen Verdrehungswinkel  $\vartheta = 1 = 57,3^\circ$ . Da Gl. 2 mit Gl. 5, S. 228 übereinstimmt, so ist sie die Differentialgleichung einer Schwingungsbewegung um die Gleichgewichtslage als Mitte, und die Dauer einer einfachen Schwingung ist nach Gl. 7, S. 229

$$4) \quad t_1 = \frac{\pi}{k}.$$

Hat der Stab oder Draht den Halbmesser  $r$  und die freie Länge  $h$ , so ist bei einer stärksten Schubspannung  $\tau$  nach 2. Theil, S. 65

$$\mathfrak{M} = \tau \cdot \frac{r^3 \pi}{2} \quad \text{und zugleich} \quad \tau = \frac{G \cdot r \cdot \vartheta}{h},$$

wenn  $G$  das Gleitmaß des Stoffes, also

$$\mathfrak{M} = G \frac{r^4 \pi}{2h} \vartheta \quad \text{und nach Gl. 3}$$

$$5) \quad k^2 = G \frac{r^4 \pi}{2h \cdot J}.$$

**Beispiel:** Der Draht habe  $r = 0,1$  cm Halbmesser und  $h = 100$  cm Länge. Am unteren Ende sei ein Schwungring von 2 kg Gewicht und 30 cm mittlerem Halbmesser befestigt. Dann ist, weil bei der Rechnung mit Centimetern  $g = 981$  gesetzt werden muss,  $J = \frac{2 \cdot 30^2}{981}$  und mit  $G = 800\,000$  at,

$$k^2 = \frac{800\,000 \cdot 0,1^4 \pi \cdot 981}{2 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 30^2} = 0,685;$$

$$k = 0,828; \quad t_1 = \frac{\pi}{0,828} = 3,8 \text{ s.}$$

Kennt man Stärke und Gleitmaß des Drahtes nicht genau genug, so kann  $k^2$  auch durch einen Verdrehungsversuch ermittelt werden. Ist  $R$  der Halbmesser des Schwungringes und setzt man  $J = \mu R^2$ , so ist  $\mu \cdot g$  annähernd das Gewicht des Ringes. Bringt man nun mit Hilfe zweier Rollen und zweier Gewichtstücke  $= \frac{1}{2} \mu g$  an dem Ringe zwei wagerechte Kräfte  $= \frac{1}{2} \mu g$  so an, dass sie auf die lothrechte Achse ein Kräftepaar vom Momente

$$\frac{1}{2} \mu g \cdot 2 R = \mu g \cdot R$$

übertragen, so wird nach Gl. 3

$$6) \quad k^2 = \frac{\mu g \cdot R}{\mu \cdot R^2 \vartheta} = \frac{g}{R \vartheta}.$$

Misst man sodann an dem Ringe die durch das Kräftepaar erzeugte Verdrehung  $R \vartheta = s$  im Abstände  $R$  von der Mitte, so ist

$$7) \quad k^2 = \frac{g}{s} \quad \text{und} \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{s}{g}},$$

d. h. gleich der Dauer einer kleinen Schwingung eines Pendels von der Schwingungslänge  $s$ .

Die Gleichungen 1—4, 6 und 7 gelten auch für die Schwingungen der sog. Unruhe einer Uhr. Die mit der Achse des Schwungrädchens verbundene Spiralfeder setzt der Verdrehung des Rades aus der Gleichgewichtslage ein Spannungsmoment entgegen, welches sich mit dem Verdrehungswinkel annähernd verhältnissgleich ändert.

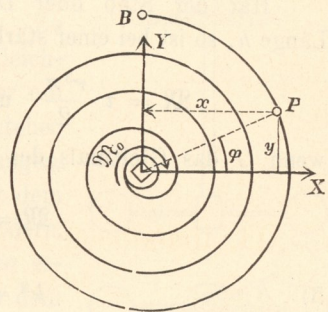
Die Spiralfeder (Fig. 180) sei am äusseren Ende bei  $B$  eingespannt; in der Mitte, wo sich die Drehachse des Schwungrädchens befindet, werde auf das innere Ende der Feder eine in  $X$  und  $Y$  zerlegte Einzelkraft und ein Kräftepaar  $\mathfrak{M}_0$  übertragen. Dann ist an einem Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  das Biegemoment

$$8) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 - Xy + Yx.$$

Wird das Schwungrädchen aus der dem spannungslosen Zustande der Feder entsprechenden Lage um den Winkel  $\vartheta$  gedreht, wobei es auf die Feder das Moment  $\mathfrak{M}_0$  und die Kräfte  $X$  und  $Y$  ausübt, so ist  $\vartheta$  der gesammte Verbiegungswinkel der Feder von der Mitte bis zum Endpunkte  $B$ . Für diesen gilt nach Keck, Elasticitätslehre, S. 227, Gl. 4:

$$9) \quad EJ_1 \vartheta = \int_0^a \mathfrak{M} \cdot ds = \mathfrak{M}_0 a - X \int_0^a y \cdot ds + Y \int_0^a x \cdot ds,$$

Fig. 180.



wenn  $a$  die Gesamtlänge der Feder bezeichnet. Da nun der Schwerpunkt der ganzen Spirale von der Länge  $a$  bei vielen Windungen derselben nahezu im Anfangspunkte der Koordinaten liegt, so sind

$$\int_0^a y \cdot ds \quad \text{und} \quad \int_0^a x \cdot ds$$

annähernd Null, und es ist

$$10) \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{E J_1}{a} \vartheta,$$

wenn  $J_1$  das Trägheitsmoment des Querschnittes der Feder bedeutet. Somit wird

$$11) \quad k^2 = \frac{E J_1}{a J} \quad (\text{Gl. 3})$$

an Stelle von Gl. 5 treten, wobei  $J$  das Trägheitsmoment der Unruhe bedeutet, und die entsprechende Pendellänge

$$12) \quad l = \frac{g}{k^2} = g \frac{J}{E J_1} a,$$

ist mit der Federlänge  $a$  verhältnisgleich.

Es sei der Querschnitt der Feder  $0,5 \cdot 0,04$  mm, das Trägheitsmoment also

$$J_1 = \frac{0,5 \cdot 0,04^3}{12} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-6} \text{ mm}^4,$$

die Länge der Feder  $a = 200$  mm; das Gewicht des Schwungrädchens  $\mu g = 0,00025$  kg, sein Halbmesser 8 mm, sein Trägheitsmoment, bezogen auf Kilogramm und Millimeter,  $J = \frac{0,016}{g}$ ,  $E = 25000$  kg/qmm, somit

$$l = \frac{0,016 \cdot 200}{25000 \cdot \frac{8}{3} \cdot 10^{-6}} = 48 \text{ mm}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t_1 = 1,003 \sqrt{0,048} = 0,22 \text{ Sekunden.}$$

### 13. Umfallende, auf dem Boden reibungslos ausgleitende Stange.

Eine Stange von der Länge  $a$  und dem Gewichte  $M \cdot g$ , die anfänglich lothrecht auf wagerechtem Boden stand (Fig. 181), falle nach rechts um; dann wird, wenn das untere Ende  $A$  der Stange nicht festgehalten ist, auch an demselben keine Reibung auftritt, der Boden nur einen lothrechten Normalwiderstand  $N$  auf die Stange übertragen. Der im Abstand  $e$  vom unteren Ende befindliche Schwerpunkt  $S$  der Stange wird sich, weil nur lothrechte Kräfte wirken, lothrecht abwärts bewegen, so dass, wenn die Stange auf dem Boden anlangt (Fig. 182), das untere Ende um  $A_0 A_1 = e$



nach links gegliitten sein wird. Es sollen die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in beliebiger Zwischenlage und beim Aufschlagen berechnet werden.

In der beliebigen Zwischenlage (Fig. 183), wo die Mittellinie der Stange mit der Lothrechten den Winkel  $\vartheta$  bildet, sei  $p$  die

Fig. 181.

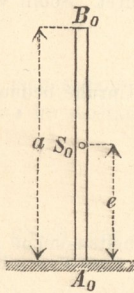


Fig. 182.

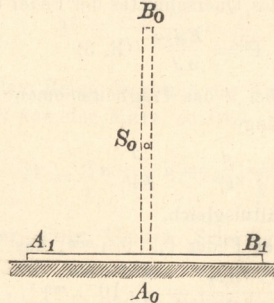
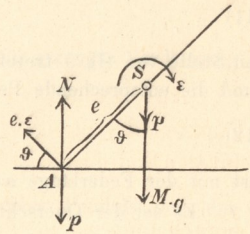


Fig. 183.



lothrecht gerichtete Beschleunigung des Schwerpunktes,  $\varepsilon$  die Winkelbeschleunigung um die rechtwinklig zur Bildebene gedachte Schwerpunktsachse, welche als freie Achse angenommen wird. Dann ist nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes

$$1) \quad p = \frac{Mg - N}{M} \quad \text{und}$$

$$2) \quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{N \cdot e \cdot \sin \vartheta}{J} \quad (\text{s. S. 204, Gl. 1}),$$

wenn  $J = M \cdot i^2$  das Trägheitsmoment in Bezug auf die bezeichnete Schwerpunktsachse bedeutet.

Das untere Ende der Stange hat die lothrechte Beschleunigung  $p$ , die Umfangsbeschleunigung  $e \cdot \varepsilon$ . Da seine Gesamtbeschleunigung aber nur wagerecht sein kann, so muss  $p$  durch  $e \cdot \varepsilon \cdot \sin \vartheta$  aufgehoben werden, mithin

$$3) \quad \varepsilon = \frac{p}{e \cdot \sin \vartheta}$$

sein. Aus Gl. 2 und 3 ergibt sich

$$N = \frac{p \cdot J}{e^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Hiermit bestimmt sich aus Gl. 1:

$$4) \quad p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta}},$$

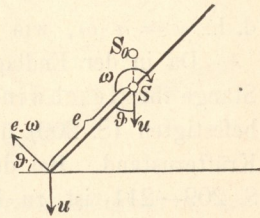
$$5) \quad \text{ferner} \quad \varepsilon = \frac{g}{e \cdot \sin \vartheta + \frac{i^2}{e \cdot \sin \vartheta}} \quad \text{und}$$

$$6) \quad N = \frac{Mg}{1 + \frac{e^2 \sin^2 \vartheta}{i^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Beschleunigung jedes Punktes der Stange berechnen; diejenige des unteren Endes beträgt nach Fig. 183:  $e \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta$ .

Fig. 184.

Die Geschwindigkeiten lassen sich am einfachsten nach dem Satze der Arbeit berechnen. In der beliebigen Zwischenlage (Fig. 184) sei  $u$  die Geschwindigkeit des Schwerpunktes (lothrecht gerichtet),  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den Schwerpunkt. Dann ist das Arbeitsvermögen  $\frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$  nach 1. Theil, S. 296. Die Arbeit der Schwerkraft ist  $Mg \cdot \overline{SS_0}$ ; es wird daher, weil  $\overline{SS_0} = e(1 - \cos \vartheta)$ , wenn man zugleich noch  $J = M \cdot i^2$  setzt,



$$\frac{Mu^2}{2} + \frac{M \cdot i^2}{2} \omega^2 = Mg \cdot e(1 - \cos \vartheta),$$

oder weil, entsprechend Gl. 3,  $\omega = \frac{u}{e \cdot \sin \vartheta}$  ist,

$$7) \quad u^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{1 + \frac{i^2}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta}} \quad \text{und}$$

$$8) \quad \omega^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta + i^2}.$$

Für die Geschwindigkeit  $w$  des unteren Endes gilt  $w = e \cdot \omega \cos \vartheta$ , also

$$9) \quad w^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{tg^2 \vartheta + \frac{i^2}{e^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

Für die Anfangsstellung, d. h.  $\vartheta = 0$ ,  $\sin \vartheta = 0$ ,  $\cos \vartheta = 1$ , geben diese Gleichungen selbstverständlich

$$p = 0; \quad \varepsilon = 0; \quad N = Mg; \quad u = 0; \quad \omega = 0; \quad w = 0.$$

Für die Endlage, d. h.  $\vartheta = 90^\circ$ ,  $\sin \vartheta = 1$ ,  $\cos \vartheta = 0$ , wird

$$p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2}}; \quad \varepsilon = \frac{g}{e + \frac{i^2}{e}}; \quad N = \frac{Mg}{1 + \frac{e^2}{i^2}}; \quad u^2 = \frac{2g \cdot e}{1 + \frac{i^2}{e^2}};$$

$$\omega^2 = \frac{2g \cdot e}{e^2 + i^2}; \quad w^2 = 0;$$

und, wenn  $v$  die Geschwindigkeit des anderen Endes,

$$v = u + (a - e)\omega, \quad \text{also}$$

$$v = a \sqrt{\frac{2g \cdot e}{e^2 + i^2}},$$

d. h.  $v = a \cdot \omega$ , wie es wegen  $w = 0$  auch sein muss.

Da in der Endlage  $w = 0$  ist, so stimmt beim Aufschlagen der Stange ihr Geschwindigkeitszustand mit dem einer unten drehbar befestigten (S. 209) überein, nicht aber der Beschleunigungs- und Kräftezustand. Bei der Vergleichung dieser Formeln mit denen auf S. 209—211 ist zu bedenken, dass  $i^2$ , bezogen auf den unteren Endpunkt (S. 209), gleichbedeutend ist mit  $i^2 + e^2$  in den Formeln der S. 234—236.

Für eine materielle Gerade, d. h. einen Stab mit gleichmässig über seine Länge vertheilter Masse, also  $e = \frac{1}{2}a$ ;  $i^2 = \frac{1}{12}a^2$ ;  $\frac{i^2}{e^2} = \frac{1}{3}$  wird in der Endlage

$$p = \frac{3}{4}g; \quad \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{a}; \quad N = \frac{1}{4}Mg; \quad u^2 = \frac{3}{4}g \cdot a; \quad \omega^2 = \frac{3g}{a};$$

$$w^2 = 0; \quad v^2 = 3g \cdot a.$$

Hieraus folgt, wie es wegen  $w = 0$  sein muss,  $v = 2u$ .

#### 14. Rollbewegung auf schiefer Ebene.

Auf einer schiefen Ebene von der Neigung  $\alpha$  rolle ein Umdrehungskörper von der Masse  $M$  (Fig. 185), dem Rollkreishalbmesser  $R$  und einem auf die Drehachse bezogenen Trägheitsmoment  $J = \mu R^2$ ; er trage mittels einer Achse vom Durchmesser  $d = 2r$  einen Körper von der Masse  $M_1$  und dem auf dieselbe

Achse bezogenen Trägheitsmoment  $J_1 = \mu_1 R^2$ , Die Drehachse sei für beide Massen  $M$  und  $M_1$  eine freie Achse. An der Tragachse der Masse  $M_1$  möge Reibung auftreten.

Zu Anfang seien beide Massen in Ruhe. Auf schiefer Ebene erfährt nun die Masse  $M$  eine abwärts gerichtete beschleunigte Rollbewegung. Die Beschleunigung des Schwerpunktes sei  $p$ , dann muss die Winkelbeschleunigung der Drehung um die Achse (nach 1. Theil, S. 300) betragen

$$\varepsilon = \frac{p}{R}.$$

Die Masse  $M_1$  muss nun die Verschiebung mit der Beschleunigung  $p$  vollständig mitmachen; eine Drehbeschleunigung  $\varepsilon_1$  wird ihr nur durch das Moment der Zapfenreibung mitgetheilt, u. zw. tritt dieses Reibungsmoment in verschiedener Grösse auf, je nachdem die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  der Masse  $M_1$  kleiner ist als diejenige der Masse  $M$ , oder den gleichen Werth hat. Im ersteren Falle kommt die volle Zapfenreibung zur Wirkung, im anderen Falle nur ein Theil derselben. Da nun beide Massen zu Anfang die Geschwindigkeit Null hatten und gleichförmig beschleunigte Bewegungen ausführen, so ist das Verhältnis von  $\omega_1$  zu  $\omega$  gleich mit demjenigen von  $\varepsilon_1$  zu  $\varepsilon$ .

**Erster Fall, geringe Zapfenreibung:** Die Zapfenreibung sei so gering, dass sie nicht im Stande ist, der Masse  $M_1$  dieselbe Winkelbeschleunigung  $\varepsilon$  zu ertheilen, welche die Masse  $M$  erleidet. Dann tritt an den Zapfen ein Gleiten auf, und somit ein volles Reibungsmoment  $D \cdot f \cdot r$ , worin  $D$  der Zapfendruck,  $f$  die Reibungsziffer.

Fig. 185.

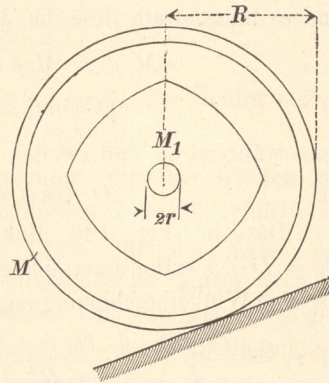
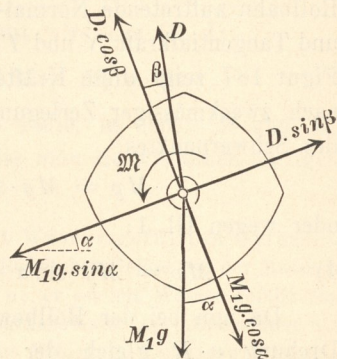


Fig. 186.



Der Zapfendruck  $D$  stimmt mit dem Gewicht  $M_1 g$  nach Grösse und Richtung nicht ganz überein. Seine Richtung weiche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um den Winkel  $\beta$  ab (s. 1. Theil, S. 302). Zerlegt man die auf  $M_1$  wirkenden Kräfte  $M_1 g$  und  $D$  nach den Richtungen parallel zur schiefen Ebene und rechtwinklig dazu, so ergibt sich (Fig. 186) in ersterer Richtung eine schräg abwärts gerichtete Gesamtkraft  $M_1 g \sin \alpha - D \sin \beta$ , und es muss, weil diese der Masse  $M_1$  die Beschleunigung  $p$  ertheilt,

$$M_1 p = M_1 g \sin \alpha - D \sin \beta, \quad \text{oder}$$

$$1) \quad D \cdot \sin \beta = M_1 g \sin \alpha - M_1 p$$

sein, während in der zweiten Richtung

$$2) \quad D \cdot \cos \beta = M_1 g \cos \alpha \quad \text{wird.}$$

Das in Fig. 186 links herum drehende Reibungsmoment  $\mathfrak{M} = D \cdot f \cdot r$  ertheilt der Masse  $M_1$  eine Winkelbeschleunigung

$$3) \quad \varepsilon_1 = \frac{D \cdot f \cdot r}{J_1} = \frac{D \cdot f \cdot r}{\mu_1 R^2}.$$

An der rollenden Masse  $M$  wirken die Schwere  $Mg$ , der Zapfendruck  $D$ , das Zapfenreibungsmoment  $\mathfrak{M}$  im Sinne rechts herum und die an der Rollbahn auftretende Normal- und Tangentialkraft  $N$  und  $T$ ; Figur 187 zeigt diese Kräfte nach zweckmässiger Zerlegung. Dann gilt für die Beschleunigung des Schwerpunktes

$$M p = M g \cdot \sin \alpha + D \cdot \sin \beta - T,$$

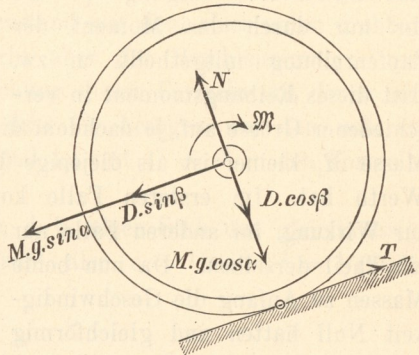
oder wegen Gl. 1:

$$4) \quad M p = M g \cdot \sin \alpha + M_1 g \cdot \sin \alpha - M_1 p - T.$$

Da nun bei der Rollbewegung die Umfangsbeschleunigung der Drehung  $\varepsilon \cdot R$  gleich der Beschleunigung  $p$  des Schwerpunktes sein muss, so wird (vergl. 1. Theil, S. 303)

$$5) \quad \mu \cdot p = T - \frac{D \cdot f \cdot r}{R}.$$

Fig. 187.



Setzt man den hieraus folgenden Werth von  $T$  in obige Gleichung ein, so entsteht:

$$6) \quad (M + M_1 + \mu)p = (M + M_1)g \cdot \sin \alpha - Df \frac{r}{R},$$

worin mit genügender Annäherung  $D = M_1 g$  gesetzt werden kann. Diese Gleichung gilt, so lange an der Achse ein Gleiten stattfindet, so lange also  $\varepsilon > \varepsilon_1$ , oder  $pR > R^2 \varepsilon$ , d. h.

$$7) \quad \frac{(M + M_1)g \cdot \sin \alpha \cdot R - M_1 g \cdot f \cdot r}{M + M_1 + \mu} > \frac{M_1 g \cdot f \cdot r}{\mu_1}$$

ist. — Für reibungslose Lagerung ( $f = 0$ ) ist Bedingung 7 erfüllt, daher Gleichung 6 gültig, mit  $f = 0$ .

**Zweiter Fall; grössere Zapfenreibung, die das Gleiten an dem Zapfen verhindert.** Ist die Bedingung 7 nicht erfüllt, ist vielmehr die Zapfenreibung genügend gross, um die Masse  $M_1$  vollständig an der Drehung von  $M$  theilnehmen zu lassen, so wird  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , und es tritt das Reibungsmoment  $\mathfrak{M}$  nur in derjenigen Grösse auf, welche nöthig ist, der Masse  $M_1$  die Winkelbeschleunigung  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  zu ertheilen, d. h., da wieder  $\varepsilon \cdot R = p$ ,

$$8) \quad \mathfrak{M} = \varepsilon \cdot J_1 = \varepsilon \cdot \mu_1 \cdot R^2 = p \cdot \mu_1 R.$$

Die Gleichungen 1 und 2 bleiben gültig, ebenso Gl. 4; an Stelle von Gl. 5 aber tritt die folgende:

$$\mu \cdot p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R} = T - \mu_1 \cdot p;$$

dies giebt  $T = (\mu + \mu_1)p$ , und hiermit wird aus Gl. 4:

$$9) \quad (M + M_1 + \mu + \mu_1)p = (M + M_1)g \cdot \sin \alpha.$$

Diese Gleichung gilt auch für solche Fälle, in denen  $M$  und  $M_1$  gegen einander unbeweglich sind, so dass man sie wie einen einzigen Körper auffassen kann.

**Beispiel:** Rollbewegung eines mit Wasser gefüllten Gefässes. Der rollende Körper sei ein dünnwandiges cylindrisches Gefäss von der Masse  $M$  und der auf den Umfang bezogenen Masse  $\mu$ ; er sei mit Wasser gefüllt von der Masse  $M_1$  und der auf den Umfang bezogenen Masse  $\mu_1$ . Betrachten wir das Wasser als vollkommen flüssig, d. h. ohne Fähigkeit, Reibungswiderstände auszuüben, so wird es beim Abwärtsrollen des Gefässes nur an der Verschiebungsbeschleunigung  $p$ , nicht aber an der Drehung theilnehmen. Es gilt daher Gl. 6 mit  $f = 0$ , d. h.

$$10) \quad (M + M_1 + \mu)p = (M + M_1)g \cdot \sin \alpha.$$

Ist das Wasser aber durch radiale Wandungen an der relativen Drehung gegen das Gefäss verhindert, oder etwa zu Eis erstarrt und an dem Gefässe festgefroren, so muss es an der Drehung theilnehmen, und es gilt nun Gl. 9, welche für  $p$  einen kleineren Werth ergibt als Gl. 10.

Werden zwei im Äusseren übereinstimmende Gefässe der ersten und der zweiten Art auf eine schiefe Ebene neben einander gesetzt und losgelassen, so wird das erste Gefäss schneller laufen als das zweite.

Ist das Gefäss so dünnwandig, dass man seine Massen  $M$  und  $\mu$  gegen die des Wassers  $M_1$  und  $\mu_1$  vernachlässigen kann, so wird im ersten Falle

$$11) \quad p = g \sin \alpha,$$

im anderen Falle mit  $\mu_1 = \frac{1}{2} M_1$ :

$$12) \quad p = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Man würde daher durch einen Rollversuch feststellen können, ob die Wasserfüllung sich gegen das Gefäss frei drehen kann oder nicht.

## 15. Anhalten eines Eisenbahnzuges durch Bremsung.

Die beschleunigte oder verzögerte Bewegung der Fuhrwerke wurde schon im 1. Theile, S. 302, jedoch ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, behandelt. Bei schnell fahrenden Eisenbahnzügen ist aber, wie schon im 1. Theile, S. 256, gesagt wurde, der Luftwiderstand so erheblich, dass er die übrigen Widerstände übersteigt. Daher soll an dieser Stelle der besonders wichtige Fall des Anhaltens eines Eisenbahnzuges mit Rücksicht auf den Luftwiderstand als Ergänzung des früher gegebenen behandelt werden.

Die Untersuchung bezieht sich auf einen einzelnen Wagen (Fig. 187); wie dieselbe dann auf einen ganzen Zug angewandt werden kann, soll im Beispiele gezeigt werden.

Wie schon im 1. Theile, S. 302 erläutert, müssen bei einem beschleunigten Fuhrwerke drei Massen von einander unterschieden werden:

1. die Masse  $M$  der rollenden Theile, d. h. der Achsen und Räder;
2. die auf den Halbmesser  $R$  des Rollkreises bezogene Masse  $\mu$  der rollenden Theile;
3. die Masse  $M_1$  der übrigen Theile des Fuhrwerks, welche nur an der Verschiebung, nicht an der Drehung, theilnehmen.

Ist  $v$  die Geschwindigkeit des Zuges,  $F$  seine Querschnittsfläche,  $\gamma$  das Gewicht von 1<sup>cbm</sup> Luft, so kann der Luftwiderstand nach 2. Theil, S. 353, Gl. 4

$$1) \quad W = \frac{\gamma}{g} F \cdot v^2$$

gesetzt werden. Unter Hinzufügung dieser Kraft  $W$  wird aus Gl. 9, 1. Theil, S. 303:

$$Mp = Mg \sin \alpha + M_1 g \sin \alpha - M_1 p - T - W,$$

wenn  $p$  die abwärts gerichtete Beschleunigung des Wagens bedeutet; oder, wenn man für schwache Gefälle  $\sin \alpha$  mit  $\alpha$  vertauscht (Fig. 188):

$$2) \quad (M + M_1)p = (M + M_1)g \cdot \alpha - T - W.$$

Für die Umfangsbeschleunigung  $p$  der Drehung der Räder ist die zwischen Rad und Schiene auftretende Reibung  $T$  die beschleunigende Kraft mit dem Momente  $T \cdot R$ . Als Widerstandsmomente wirken demselben entgegen: 1. das Zapfenreibungsmoment, welches mit genügender Genauigkeit aus einem Zapfendrucke  $M_1 g$  zu  $M_1 g \cdot f \cdot r$  abgeleitet werden kann (wenn  $r$  der Zapfenhalbmesser); 2. das Moment des Rollwiderstandes, welches, ebenfalls annähernd, mit  $(M + M_1)g \cdot e$  eingeführt werden darf (wenn  $e$  der Arm des Rollwiderstandes, s. 1. Theil, S. 248); 3. das Moment der Bremsreibung  $P \cdot f_1 \cdot R$ , wenn  $P$  die Summe der Bremsdrücke,  $f_1$  die Reibungsziffer der Bremsklötze bedeuten. Hiernach wird

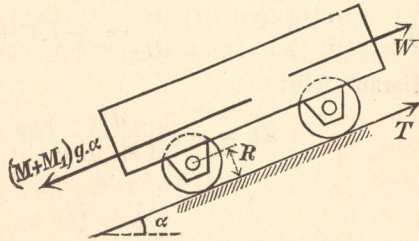
$$\mu \cdot p \cdot R = T \cdot R - M_1 g \cdot f \cdot r - (M + M_1)g \cdot e - P \cdot f_1 R$$

und somit

$$T = \mu p + M_1 g \cdot f \cdot \frac{r}{R} + (M + M_1)g \cdot \frac{e}{R} + P \cdot f_1.$$

Nennt man aber  $\alpha_0$  das Gleichgewichtsgefälle für sehr langsame Bewegung ohne Wirkung von Zugkraft, Bremskraft und

Fig. 188.





Luftwiderstand, so kann für die Summe vom Zapfenreibungs- und Rollwiderstand nach 1. Theil, S. 304 abgekürzt gesetzt werden:

$$M_1 g \cdot f \cdot \frac{r}{R} + (M + M_1) g \cdot \frac{e}{R} = (M + M_1) g \cdot \alpha_0,$$

womit  $T = \mu p + (M + M_1) g \cdot \alpha_0 + P \cdot f_1$

wird. Führt man dies in Gl. 2 ein, so entsteht

$$3) \quad p = \frac{(M + M_1) g (\alpha - \alpha_0) - P \cdot f_1 - \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot v^2}{M + M_1 + \mu}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$4) \quad \frac{(M + M_1) g (\alpha - \alpha_0) - P \cdot f_1}{M + M_1 + \mu} = -A,$$

$$5) \quad \frac{\gamma}{g} \frac{F}{M + M_1 + \mu} = B,$$

so wird  $p = -A - B \cdot v^2 = -(A + B \cdot v^2)$ , oder

$$6) \quad \frac{dv}{dt} = -(A + B \cdot v^2).$$

Hieraus folgt

$$dt = -\frac{dv}{A + Bv^2} = -\frac{1}{A} \frac{dv}{1 + \frac{B}{A} \cdot v^2}, \quad \text{oder}$$

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \frac{d\left(v \sqrt{\frac{B}{A}}\right)}{1 + \frac{B}{A} \cdot v^2}.$$

Somit ergibt sich durch Integration

$$t = -\frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} v \sqrt{\frac{B}{A}} + C.$$

War für  $t = 0$  die Geschwindigkeit  $v = c$  und soll sie für  $t = t_1$  zu Null geworden sein, so ist die zum Anhalten des Zuges erforderliche Zeit  $t_1$  leicht bestimmt zu

$$7) \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} c \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Um die zum Anhalten erforderliche Wegeslänge  $a$  zu erhalten, multiplicire man Gl. 6 mit

$$2v \cdot dt = 2dx;$$

dann wird 
$$\frac{2v \cdot dv}{A + B \cdot v^2} = -2 \cdot dx,$$

$$\frac{2B \cdot v \cdot dv}{A + B \cdot v^2} = -2B \cdot dx, \text{ also}$$

$$\ln(A + B \cdot v^2) = -2B \cdot x + C_1.$$

Mit  $v = c$  für  $x = 0$  wird  $C_1 = \ln(A + Bc^2)$ , also

$$8) \quad \ln \frac{A + B \cdot v^2}{A + B \cdot c^2} = 2B \cdot x;$$

die Bremsstrecke  $x = a$  folgt für  $v = 0$  zu

$$9) \quad a = \frac{1}{2B} \ln \left( 1 + \frac{B}{A} c^2 \right), \text{ oder}$$

$$10) \quad a = \frac{2,3026}{2B} \log \left( 1 + \frac{B}{A} c^2 \right).$$

Das Gleichgewichtsgefälle  $\alpha_1$  mit Rücksicht auf den Luftwiderstand ergibt sich für eine Geschwindigkeit  $c$ , indem man in Gl. 3 einführt:

$$p = 0 \quad \text{und} \quad P = 0.$$

Dann wird

$$11) \quad \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g} \frac{F \cdot c^2}{(M + M_1)g}.$$

**Beispiel:** Ein Schnellzug, bestehend aus Lokomotive, Tender, Gepäckwagen, Postwagen und fünf Personenwagen, fahre mit einer Geschwindigkeit  $c = 20 \text{ m/s.} = 72 \text{ km/h.}$ ; es soll die zum Anhalten erforderliche Bremszeit  $t_1$  und Bremsstrecke  $a$  berechnet werden, u. zw. auf wagerechter Strecke ( $\alpha = 0$ ) und auf einem Gefälle  $\alpha = 1:200$ .

Die Lokomotive wiege  $42 \text{ t}$ , der Tender  $20 \text{ t}$ , der übrige Zug  $105 \text{ t}$ , der ganze Zug also  $(M + M_1)g = 167 \text{ t}$ . Das auf den Rollkreis bezogene Gewicht der Achsen und Räder, d. h. nahezu das Gewicht der sämtlichen Radreifen betrage  $\mu g = 14 \text{ t}$ . Die Summe aller Bremsdrücke sei etwa gleich dem halben Gewichte des Zuges, nämlich rund  $P = 84 \text{ t}$ , die Reibungsziffer der Bremsklötze  $f_1 = 1/7$ . Dann wird nach Gl. 4:

$$A = \frac{84 \cdot 1/7 - 167(\alpha - \alpha_0)}{167 + 14} \cdot 9,81,$$

oder, wenn man (nach 1. Theil, S. 255)  $\alpha_0 = 0,0025$  annimmt,

$$12) \quad A = 0,673 - 9,05 \alpha.$$

Bei mittlerem Barometerstande und bei  $0^{\circ}\text{C}$ . wiegt  $1\text{ cbm}$  Luft  $1,29\text{ kg}$ , bei einer mittleren Temperatur von  $10^{\circ}\text{C}$ . daher (nach 2. Theil, S. 211)

$$\gamma = 1,29 \cdot \frac{273}{283} = 1,24\text{ kg}.$$

Der Luftwiderstand ist nun aber bei einem längeren Zuge nicht allein von der Querschnittsfläche abhängig, sondern auch von der Länge des Zuges, weil mit letzterer der Reibungswiderstand der Luft wächst, der ebenfalls in  $W$  nach Gl. 1 enthalten sein muss. Nach Versuchen vom Geh. Reg.-Rath Alb. Frank (Hannover) liefert eine Lokomotive mit Tender zu  $F$  den Beitrag  $7\text{ qm}$ , der dann folgende Gepäckwagen  $1,7\text{ qm}$ , jeder folgende Post- oder Personenwagen  $0,5\text{ qm}$ . Also ist hier zu schreiben:

$$F = 7 + 1,7 + 6 \cdot 0,5 = 11,7\text{ qm}.$$

Hiermit wird nach Gl. 5:

$$13) \quad B = 1,24 \cdot \frac{11,7}{181000} = 0,0000802.$$

Die zum Anhalten auf wagerechter Bahn erforderliche Zeit wird nach Gl. 7:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{0,673 \cdot 0,0000802}} \text{ arc tg } 20 \sqrt{\frac{0,0000802}{0,673}},$$

$$14) \quad t_1 = 136,11 \cdot \text{arc tg } 0,2183 = 136,11 \cdot \text{arc } (12^{\circ} 19') = 136,11 \cdot 0,215 = 29,3\text{ sek}.$$

Die Bremsstrecke aber wird nach Gl. 9:

$$15) \quad \alpha = \frac{2,3026}{2 \cdot 0,0000802} \log \left( 1 + \frac{0,0000802}{0,673} \cdot 20^2 \right) = 290,8\text{ m}.$$

Für  $\alpha = 1/200 = 0,005$  ist nach Gl. 11

$$A = 0,673 - 0,045 = 0,628,$$

$$B \text{ wie vorstehend} = 0,0000802, \text{ somit}$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{0,628 \cdot 0,0000802}} \text{ arc tg } 20 \sqrt{\frac{0,0000802}{0,628}}$$

$$t_1 = 31,3\text{ sek}.$$

$$17) \quad \alpha = \frac{2,3026}{0,0001604} \log \left( 1 + \frac{0,0000802 \cdot 400}{0,628} \right) = 310,7\text{ m}.$$

Das Gleichgewichtsgefälle für diesen Zug mit  $c = 20$  ist nach Gl. 11:

$$\alpha_1 = 0,0025 + \frac{1,24}{9,81} \frac{11,7 \cdot 400}{167000},$$

$$18) \quad \alpha_1 = 0,0025 + 0,0035 = 0,006 = \frac{1}{167}.$$

Will man Bremszeit  $t_1$  und Bremsstrecke  $\alpha$  unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes berechnen, so hat man  $B$  mit Null zu vertauschen. Hiermit nehmen nun die Gleichungen 7 und 9 die scheinbar unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  an. Man kann diese Unbestimmtheit in bekannter Weise durch Differentiation beseitigen, kann aber auch durch einfache Überlegung das Ergebnis finden

In Gl. 7 wird nämlich bei sehr kleinem  $B$  auch der Unterschied zwischen dem Bogen und seiner Tangente sehr klein, so dass man dann (wie S. 82)

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} c \sqrt{\frac{B}{A}} = c \sqrt{\frac{B}{A}}$$

setzen kann; hiermit verwandelt sich Gl. 7 in das einfache

$$19) \quad t_1 = \frac{c}{A}.$$

In Gl. 7 kann, weil bei kleinem  $x$   $\ln(1+x) = x$  wird, bei kleinem  $B$

$$\ln \left( 1 + \frac{B}{A} c^2 \right) = \frac{B}{A} c^2$$

gesetzt werden, womit dann Gl. 9 die einfache Form

$$20) \quad a = \frac{c^2}{2A} \text{ annimmt.}$$

Da übrigens für  $B=0$  die Verzögerung nach Gl. 6 einfach  $= A$  wird, so folgt  $t_1 = \frac{c}{A}$  auch einfach aus dem Begriffe der Verzögerung und

$$a = \frac{c t_1}{2} = \frac{c^2}{2A}$$

aus der Grundeigenschaft der gleichförmig veränderten Bewegung.

Für wagerechte Bahn mit  $A = 0,673$  (Gl. 12) und  $c = 20 \text{ m/s.}$  wird

$$t_1 = \frac{20}{0,673} = 29,7 \text{ s.; } a = 297,2 \text{ m.}$$

Für  $\alpha = 1/200$  mit  $A = 0,628$  wird

$$t_1 = \frac{20}{0,628} = 31,8 \text{ s.; } a = 318,5 \text{ m.}$$

Diese Zahlen weichen von den mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes erhaltenen nur so wenig ab, dass es zulässig ist, bei der Berechnung der Bremswirkung den Luftwiderstand zu vernachlässigen. Beim Bremsen genügt schon eine geringe Vermehrung des Bremsdruckes  $P$  oder der Reibungsziffer  $f_1$ , welche beide niemals ganz scharf zu bestimmen sind, um die Vernachlässigung des Luftwiderstandes auszugleichen.

Für die Ermittlung der erforderlichen Zugkraft hat der Luftwiderstand bei grosser Geschwindigkeit dagegen erheblichen Einfluss, insofern nach Gl. 18 bei dem angenommenen Zuge das Gleichgewichtsgefälle  $\alpha_1$ , welches gleichbedeutend ist mit dem Verhältnisse der auf wagerechter Bahn erforderlichen Zugkraft zu dem Gewichte des Eisenbahnzuges, durch den Luftwiderstand von  $0,0025$  auf  $0,006$  vergrößert wird.

Auch für den Antrieb des **Fahrrades** spielt der Luftwiderstand eine nicht unbedeutende Rolle. Ist  $c$  die Geschwindigkeit des Radfahrers, so kann das Gleichgewichtsgefälle des besetzten Rades in Übereinstimmung mit Gl. 11, S. 243

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g} \frac{F c^2}{(M + M_1) g}$$

gesetzt werden. Darin bezieht sich  $\alpha_0$  auf den Einfluss der Reibungswiderstände an den Achsen, Kettengelenken u. dergl., sowie des Rollwiderstandes

am Boden, das zweite Glied auf den Luftwiderstand. Zugleich bedeutet  $\alpha_0$  das Gefälle, auf dem das Rad mit sehr geringer Geschwindigkeit  $c$  ohne Kraftaufwand läuft. Die Reibungswiderstände sind an einem gut gearbeiteten und gut unterhaltenen Rade sehr gering; nicht unerheblich aber ist der Rollwiderstand auch auf guter Fahrstrasse, weil das Eindringen des Luftreifen bei der Berührung mit dem Boden Quetschungen verursacht, die, wie schon im 1. Theile, S. 251 erläutert wurde, Gleitungen und daher Reibungswiderstände zur Folge haben. Eingehende Versuche darüber fehlen noch. Einstweilen möchten wir nach Angaben des Herrn Landes-Bauinspektors Gloystein in Celle für gute Strasse und gutes Rad  $\alpha_0 = 0,007$  schätzen. Die Widerstandsfläche  $F$ , welche der Radfahrer der Luft darbietet, kann man unter günstigen Umständen zu  $0,5 \text{ m}^2$  annehmen. Mit  $\gamma = 1,24 \text{ kg/cbm}$  Luftgewicht ergibt sich dann der Luftwiderstand zu

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot c^2 = \frac{1,24}{9,81} \cdot 0,5 \cdot c^2 = 0,063 \cdot c^2$$

in Kilogrammen, wenn  $c$  in  $\text{m/s}$ . ausgedrückt ist. Bei einem Gesamtgewichte des besetzten Rades  $(M + M_1) g = 90 \text{ kg}$  würde hiernach das Gleichgewichtsgefälle

$$\alpha_1 = 0,007 + \frac{0,063}{90} c^2 = 0,007 \left( 1 + \frac{c^2}{10} \right),$$

also bei

$$c = 4,5 \text{ m/s. (= } 16,2 \text{ km/h.)}$$

$$\alpha_1 = 0,007 \left( 1 + \frac{4,5^2}{10} \right) = 0,021 = \frac{1}{47} \text{ werden.}$$

Daher ist auf wagerechter Bahn zur gleichmässigen Bewegung des Rades eine parallel zur Bahn wirkend gedachte Zugkraft

$$K = (M + M_1) g \cdot \alpha_1 = 90 \cdot 0,021 = 1,89 \text{ kg.}$$

und eine sekundliche Arbeit

$$E = K \cdot c = 1,89 \cdot 4,5 = 8,51 \text{ mkg/s. erforderlich.}$$

Ist die Kettenübersetzung so eingerichtet, dass bei der Geschwindigkeit von  $4,5 \text{ m/s}$ . die Kurbelachse in der Sekunde eine Umdrehung macht und beträgt der Kurbelhalbmesser  $0,17 \text{ m}$ , der Hub der Füsse also  $0,34 \text{ m}$ , so ist die mittlere Druckkraft des Fusses auf die Tretkurbel

$$P = \frac{8,51}{0,34} = 25 \text{ kg.}$$

## 16. Elastische Schwingungen eines Eisenbahnwagens.

Von den Schwingungs-Bewegungen eines Eisenbahnwagens treten besonders hervor: die lothrechte Verschiebung, das Wogen, und die Drehschwingung um die wagerechte Querachse durch den

Schwerpunkt, das Nicken. Ist die der Gleichgewichts-Belastung entsprechende Durchbiegung der Tragfedern  $f$ , so ist nach S. 61 diese Länge zugleich die Schwingungslänge  $l$  des Wagens und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$1) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{f}{g}}.$$

Die Bewegung des Nickens werde an einem von vier Federn getragenen Fuhrwerk entwickelt. Fig. 189 stelle dasselbe im Gleichgewichtszustande dar. Wird der Wagen um einen kleinen Winkel  $\vartheta$  um die Querachse  $S$  gedreht, so wird (Fig. 190) das linksseitige Federpaar um  $c - y_1$  stärker, das rechtsseitige um  $y_2 - c$  weniger stark zusammengedrückt als im Gleichgewichtszustande.

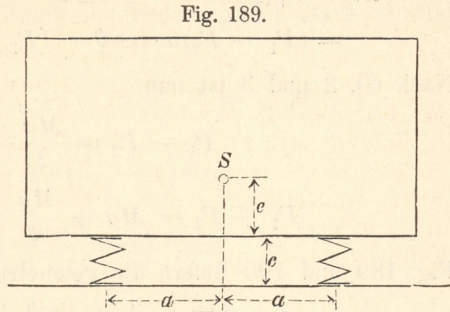
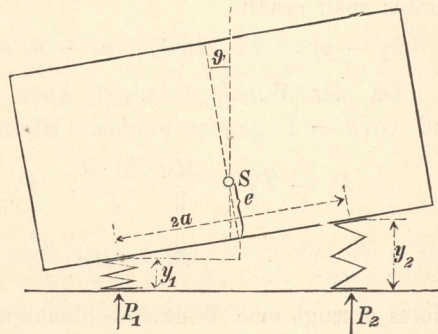


Fig. 189.



Die Federdrücke gehen in Folge dessen aus den Werthen  $\frac{1}{2} Mg$  über in  $P_1$  und  $P_2$ , wobei

$$\frac{P_1 - \frac{1}{2} M \cdot g}{\frac{1}{2} Mg} = \frac{c - y_1}{f} \quad \text{also}$$

$$2) \quad P_1 = \frac{Mg}{2} \left( 1 + \frac{c - y_1}{f} \right) \quad \text{und ebenso}$$

$$3) \quad P_2 = \frac{Mg}{2} \left( 1 - \frac{y_2 - c}{f} \right) \quad \text{ist.}$$

Der Hebelarm von  $P_1$  in Bezug auf  $S$  ist nach Fig. 190:

$$a \cos \vartheta - e \sin \vartheta,$$

der von  $P_2$ :

$$a \cos \vartheta + e \sin \vartheta.$$

Daher entsteht ein der Vergrößerung des Drehungswinkels  $\vartheta$  entgegen wirkendes Moment

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= P_1(a \cdot \cos \vartheta - e \cdot \sin \vartheta) - P_2(a \cdot \cos \vartheta + e \cdot \sin \vartheta) \\ &= (P_1 - P_2)a \cdot \cos \vartheta - (P_1 + P_2)e \cdot \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Nach Gl. 2 und 3 ist nun

$$\begin{aligned}P_1 - P_2 &= \frac{Mg}{2} \frac{y_2 - y_1}{f}; \\ P_1 + P_2 &= Mg + \frac{Mg}{2} \frac{2c - (y_2 + y_1)}{f}.\end{aligned}$$

Fig. 189 und 190 liefern die geometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned}e + c &= y_1 + a \cdot \sin \vartheta + e \cdot \cos \vartheta \quad \text{und} \\ e + c &= y_2 - a \cdot \sin \vartheta + e \cdot \cos \vartheta,\end{aligned}$$

woraus man erhält

$$y_2 - y_1 = 2a \cdot \sin \vartheta, \quad y_2 + y_1 = 2c + 2e(1 - \cos \vartheta).$$

Da der Winkel  $\vartheta$  meist klein bleibt, so möge  $\sin \vartheta = \vartheta$  und  $\cos \vartheta = 1$  gesetzt werden. Hiermit wird dann

$$\begin{aligned}P_1 - P_2 &= \frac{Mg}{2} \frac{2a \cdot \vartheta}{f}, \quad P_1 + P_2 = Mg \quad \text{und} \\ \mathfrak{M} &= Mg \left( \frac{a^2}{f} - e \right) \vartheta.\end{aligned}$$

Dieses erzeugt eine Winkelbeschleunigung (analog S. 231)

$$4) \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = - \frac{\mathfrak{M}}{J} = - k^2 \vartheta, \quad \text{wenn}$$

$$k^2 = \frac{Mg}{J} \left( \frac{a^2}{f} - e \right) \quad \text{und} \quad J = M \cdot i^2$$

das Trägheitsmoment des Wagens in Bezug auf die Querachse  $S$  bedeutet, womit man auch schreiben kann

$$5) \quad k^2 = \frac{g}{i^2} \left( \frac{a^2}{f} - e \right).$$

Gl. 4 ist wieder (s. S. 231) die Differentialgleichung einer Schwingungsbewegung von der Schwingungslänge

$$6) \quad l = \frac{g}{k^2} = \frac{i^2}{\frac{a^2}{f} - e}.$$

Für einen dreiachsigen Wagen, dessen Endachsen den Abstand  $a$  von der Mittelachse haben, bleibt letztere von der Schwingung ziemlich unberührt. Unter der Voraussetzung, dass im Gleichgewichtszustande sämtliche Federn gleich stark belastet sind, wird dann

$$P_1 - P_2 = \frac{2}{3} Mg \frac{a \cdot \vartheta}{f}; \quad P_1 + P_2 = \frac{2}{3} Mg;$$

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{3} Mg \left( \frac{a^2}{f} - e \right) \vartheta;$$

$$7) \quad k^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{i^2} \left( \frac{a^2}{f} - e \right) \quad \text{und}$$

$$8) \quad l = \frac{3}{2} \frac{i^2}{\frac{a^2}{f} - e}.$$

**Beispiel:** Nach überschlägiger Berechnung ist für einen dreiachsigen Personenwagen mit  $a = 3,15 \text{ m}$  gefunden  $e = 1,15 \text{ m}$ ;  $i^2 = 9,03 \text{ qm}$ . Es kann bei mittlerer Belastung die Gleichgewichts-Durchbiegung der Federn  $f = 0,16 \text{ m}$  angenommen werden. Hiermit ergibt sich

$$l = \frac{3}{2} \frac{9,03}{\frac{9,92}{0,16} - 1,15} = \frac{13,55}{62 - 1,15} = 0,22 \text{ m}.$$

Da das zweite Glied im Nenner gegen das erste sehr unerheblich ist, so kann man es wohl vernachlässigen und erhält dann ebenfalls  $0,22 \text{ m}$ . Mit Rücksicht auf dieses Ergebnis kann man statt Gl. 8 kürzer schreiben:

$$9) \quad l = \frac{3}{2} f \frac{i^2}{a^2},$$

oder, wenn man die auf den Abstand  $a$  bezogene Masse  $\mu$  mit

$$J = M \cdot i^2 = \mu \cdot a^2 \quad \text{also} \quad \frac{i^2}{a^2} = \frac{\mu}{M} \quad \text{einführt,}$$

$$10) \quad l = \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} f.$$

Bei dem hier in Frage stehenden Personenwagen ergibt sich

$$\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} \quad \text{zu} \quad 1,37, \quad \text{daher}$$

$$11) \quad l = 1,37 \cdot f = 1,37 \cdot 0,16 = 0,22 \text{ m}.$$

Die einfache Schwingungsdauer des Wagens ist (Gl. 1)  $t_1 = 0,4 \text{ s}$ , mit  $2^{1/2}$  einfachen oder  $1^{1/4}$  Doppelschwingungen in der Sekunde; diejenige des Nickens  $t_2 = 0,47 \text{ s}$ , mit  $2,13$  einfachen oder  $1,06$  Doppelschwingungen in der Sekunde. Bei etwa  $9 \text{ m}$  Schienenlänge und  $20 \text{ m}$  sekundlicher Geschwindigkeit erfolgen



die Stöße an den Schienenlücken, welche die wesentlichste Ursache der Schwingungen darstellen in Zeiträumen von  $0,45$  s. Dies Verhältnis ist ein günstiges, weil jeder zweite Stoss die Einwirkung des ersten auf das Nicken ziemlich wieder aufhebt.

## 17. Wälzendes oder wiegendes Pendel.

### a) Auf ebener Fläche.

Nach 1. Theil, S. 149 ist ein gleichförmiger Kugel- oder Cylinder-Abschnitt, der mit der gekrümmten Fläche sich auf eine wagerechte Ebene stützt, in gesichertem Gleichgewichte. Wird er aus der Gleichgewichtslage gebracht, so führt er unter

Einwirkung der Schwere Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus; setzt man nun die

Berührungsflächen als genügend rauh voraus, dass ein Gleiten an denselben verhütet wird, so entsteht eine Roll- oder Wälzbewegung, und man nennt solche Vorrichtung (Fig. 191) ein wälzendes oder wiegendes Pendel; auch die Kinderwiege gehört zu diesen.

In der Mittellage befindet sich der Schwerpunkt  $S_0$  lothrecht unter dem Mittelpunkte  $B_0$  des Rollkreises und zugleich in seiner tiefsten Lage. Beim Wiegen beschreibt der Schwerpunkt einen Theil einer verkürzten Cykloide  $S_1 S_0 S_2$ . Die grösste Abweichung von der Mittellage werde durch den Winkel  $\alpha$  gemessen.

Um die Dauer einer einfachen Schwingung  $S_1 S_0 S_2$  zu ermitteln, betrachten wir den Körper in einer Zwischenlage, (Fig. 192), die

Fig. 191.

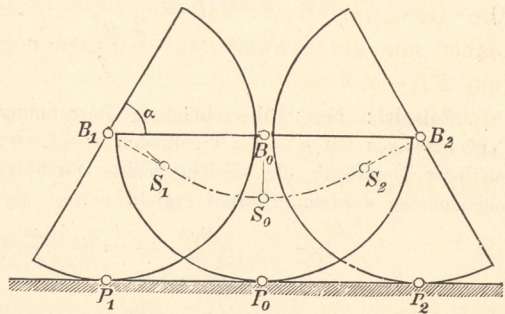
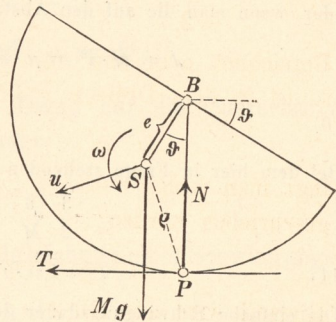


Fig. 192.



von der Gleichgewichtslage um den beliebigen Winkel  $\vartheta$  abweicht. Die Wälzbewegung besteht aus einer Verschiebung des Schwerpunktes  $S$  mit der Geschwindigkeit  $u$  und einer gleichzeitigen Drehung um die rechtwinklig zur Bildebene stehende Schwerpunktsachse  $S$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Dann ist das augenblickliche Arbeitsvermögen des Körpers nach S. 185  $\frac{Mu^2}{2} + \frac{J}{2}\omega^2$ , worin  $J$  das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die genannte Schwerpunktsachse  $S$  bedeutet. Es wirken auf den Körper die äusseren Kräfte  $Mg$  (durch den Schwerpunkt) und die Widerstände  $N$  und  $T$  der Berührungsstelle. Die letzteren beiden verrichten bei der Wälzung keine Arbeit, weil ihr Angriffspunkt  $P$  die Geschwindigkeit Null hat. Zur Arbeitsverrichtung kommt daher nur die Schwerkraft in Frage. Der Schwerpunkt  $S$  liegt um  $\overline{SB} \cdot \cos \vartheta = e \cdot \cos \vartheta$  unterhalb des Punktes  $B$ , also, da  $B$  stets in gleicher Höhe verbleibt, um  $e(\cos \vartheta - \cos \alpha)$  unter seiner Höchstlage. Weil nun in letzterer die Geschwindigkeiten  $u$  und  $\omega$  Null waren, so ist nach dem Satze der Arbeit

$$1) \quad \frac{M \cdot u^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2} = Mg \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha).$$

Für die in der Bildfläche erfolgende ebene Bewegung bildet der Berührungspunkt  $P$  den Augenblicks-Drehpunkt, sonach muss  $u = \omega \cdot \overline{PS} = \omega \cdot \varrho$  und auch rechtwinklig zu  $PS$  sein. Führt man dies in Gl. 1 ein und ausserdem  $J = M \cdot i^2$ , so wird

$$2) \quad \frac{M\omega^2}{2} \cdot \varrho^2 + \frac{M\omega^2}{2} \cdot i^2 = Mg \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha).$$

Bezeichnet man aber mit  $r$  den Halbmesser  $PB$  des Rollkreises, so ist in dem Dreieck  $PSB$

$$\varrho^2 = e^2 + r^2 - 2e \cdot r \cdot \cos \vartheta;$$

fügt man rechts noch  $+ 2e \cdot r$  und  $- 2e \cdot r$  hinzu, so kann auch geschrieben werden

$$\varrho^2 = (r - e)^2 + 2er(1 - \cos \vartheta).$$

Hiermit wird aus Gl. 2:

$$3) \quad \omega = \sqrt{\frac{2g \cdot e (\cos \vartheta - \cos \alpha)}{(r - e)^2 + 2e \cdot r (1 - \cos \vartheta) + i^2}}.$$

Weil nun  $\vartheta$  der bis zur Mittellage noch zurückzulegende Drehungswinkel ist, der sich bei der jetzt betrachteten Bewegung verkleinert,

so ist 
$$\omega = - \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und}$$

$$4) \quad dt = - d\vartheta \sqrt{\frac{(r-e)^2 + i^2 + 2e \cdot r(1 - \cos \vartheta)}{2g \cdot e(\cos \vartheta - \cos \alpha)}}.$$

Die Integration dieser Gleichung wird nur unter Annahme kleiner Schwingungswinkel  $\alpha$  einfach; alsdann kann man  $2e \cdot r(1 - \cos \vartheta)$  gegen die übrigen Glieder des Zählers vernachlässigen; führt man nun noch zur Abkürzung

$$5) \quad \frac{(r-e)^2 + i^2}{e} = l$$

ein, so ergibt sich

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \alpha)}}.$$

Weil diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung für das mathematische Pendel von der Länge  $l$  (1. Theil, S. 77) übereinstimmt, so hat das wälzende Pendel unter Voraussetzung **kleiner** Schwingungswinkel gleiche Schwingungsdauer mit einem mathematischen Pendel von der Länge  $l$  nach Gl. 5, nämlich

$$6) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Würde der Körper sich als gewöhnliches physisches Pendel um die Achse  $B$  drehen, so wäre nach 1. Theil, S. 279, Gl. 5 die Schwingungslänge

$$7) \quad l_1 = \frac{J_B}{Me} = \frac{J_S + Me^2}{Me} = \frac{i^2 + e^2}{e}.$$

Es ist also

$$8) \quad l \underset{\leq}{\geq} l_1, \quad \text{wenn } (r-e)^2 \underset{\leq}{\geq} e^2.$$

Für den wiegenden Halbcylinder ist (nach 1. Theil, S. 132)

$$e = \frac{4}{3\pi} r = 0,424 r.$$

In Bezug auf die Achse  $B$  ist das Trägheitsmoment (nach 1. Theil, S. 272)

$$J_B = \frac{Mr^2}{2},$$

daher  $J_S = J_B - M \cdot e^2 = M \left( \frac{r^2}{2} - 0,424^2 \cdot r^2 \right)$  und

$$i^2 = \frac{J_S}{M} = 0,320 r^2.$$

Hiernach wird die Schwingungslänge der halbcylindrischen Wiege (Gl. 5)

$$9) \quad l = r \frac{(1 - 0,424)^2 + 0,320}{0,424} = 1,537 r,$$

während für den an der Achse  $B$  aufgehängten Halbcylinder die Schwingungslänge

$$10) \quad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{\frac{r^2}{2}}{0,424 r} = 1,179 r$$

wird. Es ist also thatsächlich  $l > l_1$ , weil  $(r - e)^2 = 0,332 r^2$ ,  $e^2$  aber nur  $= 0,180 r^2$ .

Für die wiegende Halbkugel ist (nach 1. Theil, S. 136 u. 273)

$$e = \frac{3}{8} r; \quad J_B = 0,4 M \cdot r^2; \quad J_S = M(0,4 - \frac{9}{64}) r^2;$$

$$i^2 = 0,259 r^2. \quad \text{Daher}$$

$$11) \quad l = r \frac{(1 - \frac{3}{8})^2 + 0,259}{\frac{3}{8}} = 1,732 r;$$

während für die an der Achse  $B$  aufgehängte Halbkugel die Schwingungslänge

$$12) \quad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{0,4}{\frac{3}{8}} r = 1,067 r$$

wird. Es ist also wieder  $l > l_1$ .

Für eine wiegende dünne Halbkugelschale ergibt sich das Trägheitsmoment  $J_B$  leicht aus dem des Halbkugelkörpers. Für letzteren ist

$$J_B = 0,4 M r^2 = 0,4 \cdot \frac{2}{3} r^5 \pi = \frac{4}{15} r^5 \pi;$$

ändert sich  $r$  um  $dr$ , so ist die Zunahme von  $J_B$  das Trägheitsmoment einer Halbkugelschale von der Wandstärke  $dr$ , nämlich  $\frac{4}{3} r^4 \pi \cdot dr$ ; lässt man hierin den Faktor  $dr$  fort, so ergibt sich  $\frac{4}{3} r^4 \pi$  als Trägheitsmoment einer Halbkugeloberfläche, und weil deren Grösse  $2 r^2 \pi$  beträgt, so wird für dieselbe

$$J_B = M \cdot \frac{4}{3} \frac{r^4 \pi}{2 r^2 \pi} = \frac{2}{3} M \cdot r^2.$$

Da nun (nach 1. Theil, S. 135 und 150)  $e = \frac{r}{2}$ , so gilt für die Schwerpunktsachse

$$i^2 = \frac{2}{3} r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{5}{12} r^2, \text{ daher}$$

$$13) \quad l = r \frac{(1 - 0,5)^2 + \frac{5}{12}}{0,5} = \frac{4}{3} r;$$

für die an der Achse  $B$  hängende Kugelschale aber wird nach Gl. 7

$$14) \quad l_1 = \frac{\frac{2}{3} r^2}{0,5 r} = \frac{4}{3} r;$$

d. h.  $l = l_1$ , weil  $(r - 0,5 r)^2 = (0,5 r)^2$  ist.

Wird ein prismatischer Stab von der Länge  $a$  nach Fig. 193 zu einem wälzenden Pendel gestaltet, indem man oben an zwei Seiten kleine Halbcylinder vom Halbmesser  $r$  befestigt und diese auf je einer wagenrechten Schiene wiegen lässt,

so ist  $e = 0,5 a$ ;  $i^2 = \frac{a^2}{12}$ ;

$$15) \quad l = a \frac{\left(\frac{r}{a} - 0,5\right)^2 + \frac{1}{12}}{0,5} \\ = a \left( \frac{2}{3} - 2 \frac{r}{a} + 2 \frac{r^2}{a^2} \right),$$

Fig. 193.

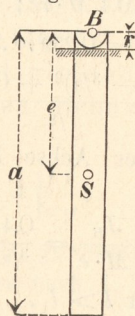
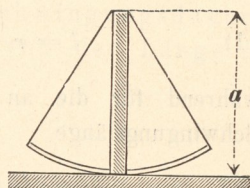


Fig. 194.



während für die Drehung um die Achse  $B$  (nach 1. Theil, S. 283) einfach  $l_1 = \frac{2}{3} a$  ist. Für zwei Werthe von  $\frac{r}{a}$  wird Gl. 15 zu  $l = \frac{2}{3} a$ , nämlich

1. selbstverständlich für  $r = 0$ ;

2. für  $r = a = 2e$ ,

d. h. für eine Wiege, bei welcher der Rollkreis nach Fig. 194 aus einem sehr leichten Kreisbogen vom Halbmesser  $a$  gebildet ist.

Für  $\frac{r}{a} < 1$  ist  $l < \frac{2}{3} a$ .

**b) Wiegendes Pendel in einer Hohlfläche; Hypocykloiden-Wiege.**

Die auf einander rollenden Kreise (Fig. 195) mögen die Halbmesser  $r$  und  $R$  haben. Der Schwerpunkt  $S$  des wiegenden Körpers liege wieder um  $e$  unterhalb des Mittelpunktes  $B$  seines Rollkreises vom Halbmesser  $r$ . Im Gleichgewichtszustande möge der Körper die Hohlfläche bei  $P_0$  berühren; ertheilt man ihm eine Rollbewegung rechts herum, bis die Berührung in  $P$  erfolgt (Fig. 196), bezeichnet mit  $Q$  denjenigen Punkt, der vorher mit  $P_0$  zusammenfiel, so muss  $\overline{PQ} = \overline{PP_0}$  sein, oder wenn man

$$\sphericalangle QBP = \psi,$$

$$\sphericalangle P_0AB = \vartheta_1$$

setzt,

$$r \cdot \psi = R \cdot \vartheta_1,$$

mithin 
$$\psi = \vartheta_1 \frac{R}{r}.$$

Weicht die Gerade  $BSQ$ , welche ursprünglich lothrecht

war (als  $B_0S_0P_0$ ), um  $\vartheta$  von der Lothrechten ab, so ist  $\vartheta$  der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, als er aus der Gleichgewichtslage in die jetzige Zwischenlage kam, u. zw. ist nach der Figur

$$\vartheta = \psi - \vartheta_1 = \vartheta_1 \left( \frac{R}{r} - 1 \right) = \frac{R - r}{r} \vartheta_1 \quad \text{also}$$

16) 
$$\vartheta_1 = \frac{r}{R - r} \vartheta.$$

Legt man durch den Mittelpunkt  $A$  des festen Kreises vom Halbmesser  $R$  eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt  $B$  des beweglichen Kreises in der Tiefe  $z = \overline{AB} \cdot \cos \vartheta_1 = (R - r) \cos \vartheta_1$ .

Fig. 195.

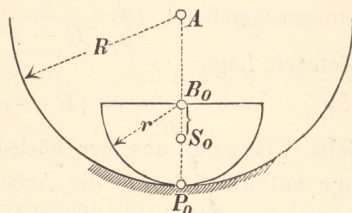
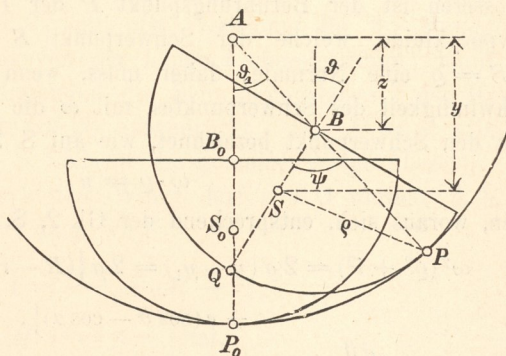


Fig. 196.



unter dem festen Punkt  $A$ , der Schwerpunkt  $S$  aber noch um  $e \cdot \cos \vartheta$  tiefer, d. h. in der Tiefe

$$17) \quad y = (R - r) \cos \vartheta_1 + e \cdot \cos \vartheta$$

unter  $A$ . In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge  $\vartheta$  den Werth  $\alpha$  erreichen; setzt man dann noch (entsprechend Gl. 16)  $\frac{r}{R - r} \alpha = \alpha_1$ , so ist der Werth  $y$  in der höchsten Lage

$$18) \quad y_1 = (R - r) \cos \alpha_1 + e \cdot \cos \alpha.$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die beliebige Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

$$19) \quad Mg(y - y_1) = Mg\{(R - r)(\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e(\cos \vartheta - \cos \alpha)\}.$$

Für die ebene Rollbewegung des kleineren Kreises in dem grösseren ist der Berührungspunkt  $P$  der Pol; für die verkürzte Hypocycloide, welche der Schwerpunkt  $S$  beschreibt, ist daher  $PS = \varrho$  eine Normale; daher muss, wenn man mit  $u$  die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, mit  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt bezeichnet, wie auf S. 251,

$$\omega \cdot \varrho = u$$

sein, woraus sich, entsprechend der Gl. 2, S. 251, ergibt:

$$\omega^2(\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1) = 2g\{(R - r)(\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e(\cos \vartheta - \cos \alpha)\}.$$

Mit  $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$  wird dann

$$dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{\varrho^2 + i^2}{2g(y - y_1)}}.$$

Auch in diesem Falle möge nur auf sehr kleine Schwingungen weiter eingegangen werden, so dass annähernd

$$\varrho = r - e;$$

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \cos \vartheta_1 = 1 - \frac{\vartheta_1^2}{2} = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \frac{r^2}{(R - r)^2};$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad \cos \alpha_1 = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \frac{r^2}{(R - r)^2}$$

gesetzt werden kann.

Dann wird nach Gl. 17 und 18

$$2g(y - y_1) = 2g \left\{ (R - r) \left( \frac{\alpha^2 - \vartheta^2}{2} \right) \frac{r^2}{(R - r)^2} + e \frac{\alpha^2 - \vartheta^2}{2} \right\} \\ = g(\alpha^2 - \vartheta^2) \left( \frac{r^2}{(R - r)} + e \right) \quad \text{und}$$

$$dt = - \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} \sqrt{\frac{(r - e)^2 + i^2}{\left( \frac{r^2}{(R - r)} + e \right) g}}. \quad \text{Setzt man}$$

$$20) \quad l = \frac{(r - e)^2 + i^2}{\frac{r^2}{R - r} + e},$$

so nimmt der Ausdruck für  $dt$  die einfache Form an:

$$21) \quad dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\alpha^2 - \vartheta^2},$$

was nach 1. Theil, S. 77 mit der Gleichung für die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge  $l$  übereinstimmt; somit ist für sehr kleine Schwingungen die Schwingungslänge  $l$  der Hypocykloiden-Wiege durch Gl. 20 ausgedrückt. Für  $R = \infty$  stimmt Gl. 20 mit der Gl. 5, S. 252 für die gemeine Wiege überein.

Bei dieser Hypocykloiden-Wiege darf  $e = 0$  werden, d. h.  $S$  mit  $B$  zusammenfallen; dann wird

$$l = \frac{r^2 + i^2}{r^2} (R - r),$$

oder, wenn man  $J = M \cdot i^2 = \mu r^2$  setzt,

$$l = (R - r) \left( 1 + \frac{\mu}{M} \right) \quad \text{und} \quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

was dem Sinne nach mit Gl. 7 im 1. Theile, S. 302 übereinstimmt.

Die Hypocykloiden-Wiege hat unter sonst gleichen Umständen eine kleinere Schwingungslänge, mithin auch eine kleinere Schwingungsdauer als die gemeine Wiege.

Eine wiegende Bewegung ist nur möglich, wenn der Körper in der tiefsten Lage Standsicherheit besitzt, wenn also (Fig. 196) bei einer kleinen Drehung nach rechts die Schwerpunkts-Lothrechte links von der Berührungsstelle  $P$  liegt. Bei wagerechter Unterstützungsfäche (Fig. 192) beträgt die linksseitige Entfernung der Schwerpunkts-Lothrechten von dem Stützpunkte  $P$  nur  $e \sin \vartheta$ ;



diese Grösse muss positiv, d. h.  $e > 0$  sein, oder es muss der Schwerpunkt  $S$  unter dem Mittelpunkte  $B$  liegen. Für  $e = 0$  wird die Standsicherheit Null und zugleich  $l = \infty$ , d. h. es kommt keine Schwingung mehr zu Stande, und für  $e < 0$  wird auch die Schwingungslänge  $< 0$ , was für ein Pendel widersinnig ist.

Bei der Hypocykloiden-Wiege aber darf der Schwerpunkt  $S$  auch oberhalb des Mittelpunktes  $B$  liegen, wie aus Fig. 196 ersichtlich. Der linksseitige Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von dem Stützpunkte  $P$  beträgt nämlich

$$r \sin \vartheta_1 + e \sin \vartheta,$$

also für kleine Winkel

$$r \vartheta_1 + e \vartheta = \vartheta \left( \frac{r^2}{R-r} + e \right);$$

dieser Werth muss  $> 0$  sein. Es wird also eine Hypocykloiden-Wiege auch noch bei negativem  $e$  möglich sein, wenn nur der absolute Werth des negativen  $e$  kleiner ist als  $\frac{r^2}{R-r}$ , oder

$$22) \quad \frac{r^2}{R-r} > -e.$$

Für  $\frac{r^2}{R-r} = -e$  würde wiederum  $l = \infty$ . Es würde z. B.

$$\text{für } R = 2r \quad r > -e$$

sein müssen, d. h. der Schwerpunkt dürfte nur um weniger als  $r$  oberhalb des Punktes  $B$  liegen.

### e) Wiegendes Pendel auf einer gewölbten Fläche; Epicykloiden-Wiege (Fig. 197).

In diesem Falle muss für Standsicherheit in der Gleichgewichtslage die Bedingung erfüllt sein

$$e \sin \vartheta > r \sin \vartheta_1,$$

oder für kleine Winkel  $e \cdot \vartheta > r \cdot \vartheta_1$ , und weil

$$r \cdot \varphi = R \cdot \vartheta_1, \quad \text{und zugleich}$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + \varphi = \vartheta_1 \left( 1 + \frac{R}{r} \right), \quad \text{also}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta \frac{r}{R+r},$$

so folgt als Bedingung der Standsicherheit

$$23) \quad e > \frac{r^2}{R + r}.$$

Bei der Epicykloiden-Wiege muss der Schwerpunkt also tiefer liegen als bei der einfachen Cykloiden-Wiege.

Die gleichen Erwägungen, wie sie bei der Hypocykloiden-Wiege angestellt wurden, führen hier zu den Gleichungen

$$24) \quad l = \frac{(r - e)^2 + i^2}{e - \frac{r^2}{R + r}} \quad \text{und}$$

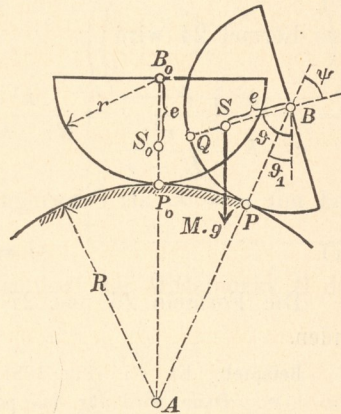
$$25) \quad dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2 - \vartheta^2}},$$

worin  $l$  wieder die Schwingungslänge der Wiege bedeutet.  $R = \infty$

führt auch hier wieder zur einfachen Cykloiden-Wiege mit

$$l = \frac{(r - e)^2 + i^2}{e}.$$

Fig. 197.

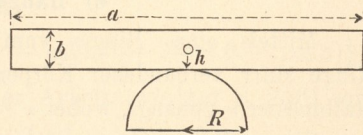


#### d) Die Wippe.

Wird in Fig. 197 der Halbmesser  $r$  des rollenden Kreises unendlich gross, so haben wir es mit dem Abwälzen einer ebenen Fläche, z. B. der Unterfläche einer Bohle, auf einem cylindrischen Baume, mit einer Wippe (Fig. 198), zu thun. Doch sind für diesen Fall die Formeln 23 und 24 nicht unmittelbar zu verwenden, weil  $r = \infty$  auch  $e = \infty$  bedingen würde.

Vielmehr muss die Höhe des Schwerpunktes der wippenden Bohle über ihrer Unterfläche etwa mit  $h$  eingeführt, und in den

Fig. 198.



Formeln 23 und 24  $r - e$  mit  $h$  und  $e$  mit  $r - h$  vertauscht werden. Dann wird aus Formel 23:

$$r - h > \frac{r^2}{R + r}; \quad h < r - \frac{r^2}{R + r} = \frac{Rr}{R + r} = \frac{R}{\frac{R}{r} + 1}$$

und, weil  $r = \infty$ , verlangt die Standsicherheit der Wippe

$$26) \quad h < R.$$

Aus Formel 24 wird

$$l = \frac{h^2 + i^2}{r - h - \frac{r^2}{R + r}} = \frac{h^2 + i^2}{Rr - h(R + r)} (R + r) = \frac{(h^2 + i^2) \left( \frac{R}{r} + 1 \right)}{R - h \left( \frac{R}{r} + 1 \right)}$$

und mit  $r = \infty$  als Schwingungslänge der Wippe

$$27) \quad l = \frac{h^2 + i^2}{R - h}.$$

Die Formeln 26 und 27 lassen sich auch leicht unmittelbar finden.

**Beispiel:** Es sei (Fig. 198)  $a = 2 \text{ m}$ ;  $b = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$ ;  $h = 0,025 \text{ m}$   $R = 0,1 \text{ m}$ . Dann wird für das polare Trägheitsmoment des Rechtecks nach 1. Theil, S. 271:

$$i^2 = \frac{a^2 + b^2}{12} = \frac{4 + 0,05^2}{12} = 0,334, \quad \text{daher}$$

$$l = \frac{0,0006 + 0,334}{0,1 - 0,025} = 4,46 \text{ m}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \text{rund } \sqrt{l} = 2,1 \text{ s.}$$

Offenbar ist für derartige Bohlenwippen genügend genau

$$l = \frac{a^2}{12(R - h)} = \frac{a^2}{12 \left( R - \frac{b}{2} \right)} = 4,44 \text{ m.}$$

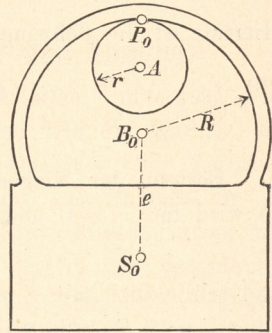
### e) Hängende Wiege.

Mittels eines Ringes vom Halbmesser  $R$  sei ein mit dem Ringe starr verbundener Körper über einen festen Cylinder vom Halbmesser  $r$  gehängt, wobei  $r < R$  (Fig. 199). Der Schwerpunkt  $S$  der Wiege liege um  $e$  unter dem Mittelpunkte des Ringes vom Halbmesser  $R$ . Ertheilt man dem Körper eine Rollbewegung links herum, bis der Berührungspunkt sich in  $P$  befindet (Fig. 200).

und bezeichnet mit  $Q$  denjenigen Punkt, der vorher mit  $P_0$  zusammenfiel, so muss  $\widehat{PQ} = \widehat{PP_0}$  oder  $R\psi = r \cdot \vartheta_1$  sein. Weicht die Gerade  $QBS$ , welche ursprünglich lothrecht war ( $P_0B_0S_0$ ) um  $\vartheta$  von der Lothrechten ab, so ist  $\vartheta$  der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, und zwar ist nach der Figur

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_1 - \psi = \vartheta_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \\ &= \vartheta_1 \frac{R - r}{R} \quad \text{und} \\ \vartheta_1 &= \frac{R}{R - r} \vartheta. \end{aligned}$$

Fig. 199.



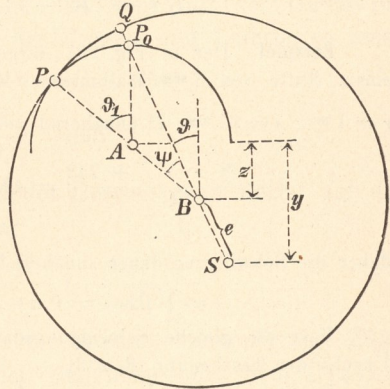
Legt man durch den Mittelpunkt  $A$  des festen Kreises eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt  $B$  des beweglichen Kreises in der Tiefe

$$\begin{aligned} z &= \overline{AB} \cdot \cos \vartheta_1 = (R - r) \cos \vartheta_1, \\ \text{der Schwerpunkt } S &\text{ aber in der Tiefe} \\ y &= (R - r) \cos \vartheta_1 + e \cdot \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Fig. 200.

In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge  $\vartheta$  den Werth  $\alpha$  erreichen; setzt man dann auch noch

$$\frac{R}{R - r} \alpha = \alpha_1,$$



so ist der Werth  $y$  in der höchsten Lage

$$y_1 = (R - r) \cos \alpha_1 + e \cos \alpha.$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

$$Mg(y - y_1) = Mg \left\{ (R - r)(\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e(\cos \vartheta - \cos \alpha) \right\}.$$

Es wird daher nach dem Satze der Arbeit (wie auf S. 256) mit

$$\varrho = PS = \text{annähernd } R + e, \quad \omega^2(\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1)$$

$$dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{(R + e)^2 + i^2}{2g(y - y_1)}}.$$

Daraus folgt in ähnlicher Weise wie auf S. 256

$$dt = - \frac{d\vartheta}{\alpha^2 - \vartheta^2} \sqrt{\frac{(R+e)^2 + i^2}{\left(\frac{R^2}{R-r} + e\right)g}}$$

Hiermit ist die Schwingungslänge der hängenden Wiege

$$28) \quad l = \frac{(R+e)^2 + i^2}{\frac{R^2}{R-r} + e}$$

Besteht der wiegende Körper nur aus einem dünnen Ringe, so wird mit  $e = 0$  und  $i^2 = R^2$ :

$$l = 2(R-r),$$

und schliesslich mit  $r = 0$  für den ein physisches Pendel bildenden Ring  $l = 2R$ , wie schon im 1. Theile, S. 284 gefunden wurde.

Mit  $R+e = -h$  und schliesslich  $R = \infty$  wird aus der hängenden Wiege wiederum die Wippe mit

$$l = \frac{h^2 + i^2}{Rr - (R-r)h} (R-r) = \frac{h^2 + i^2}{r-h}.$$

**Beispiel:** Der in Fig. 201 dargestellte Körper (Taschenuhr) hänge auf einem Stifte von 1 mm Halbmesser; es ist  $R = 8$  mm;

$r = 1$  mm;  $e = 37$  mm;  $i^2$  annähernd  $= \frac{22^2}{2}$ ; also (Gl. 28)

$$l = \frac{(8+37)^2 + 242}{\frac{64}{7} + 37} = 49,5 \text{ mm,}$$

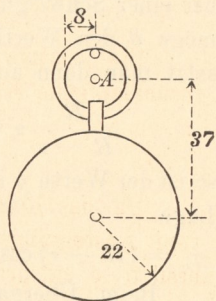
daher die Schwingungsdauer annähernd

$$t = \sqrt{0,0495} = 0,22 \text{ s.}$$

Fast die gleiche Schwingungsdauer hat auch die Unruhe der Taschenuhr (S. 233).

Denkt man sich diese Uhr auf einem schwimmenden Brettchen liegend, so wird, weil die schwingende Unruhe nur unter dem Einfluss innerer Kräfte der Uhr steht, die Momentensumme der Bewegungsgrössen der Uhr sich nicht ändern können (S. 193). Behielte nun das Gehäuse der Uhr seine ursprüngliche Lage, so würde vermöge der Schwingung der Unruhe die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die Achse der Unruhe und auch in Bezug auf eine dazu parallele Schwerpunktsachse sich fortwährend ändern. Diese Änderung muss dadurch aufgehoben werden, dass die übrige Uhr kleine Drehschwingungen um die lothrechte Schwerpunktsachse ausführt, welche den Schwingungen der Unruhe stets entgegengesetzt gerichtet sind. Diese Anregung zur Schwingung

Fig. 201.



macht sich auch geltend, wenn man die Uhr nach Fig. 201 aufhängt; stimmt die Schwingungsdauer der aufgehängten Uhr mit derjenigen der Unruhe überein, so kann die aufgehängte Uhr unter günstigen Umständen in Folge der Bewegung der Unruhe in deutlich sichtbare Schwingungen gerathen.

### 18. Wirkung des Pulvers in der Kanone.

In Folge der Ausdehnung der entwickelten Pulvergase wird dem Geschosse, welches zu Anfang, ebenso wie die Kanone, die Geschwindigkeit Null hatte, eine Geschwindigkeit  $v$  beim Verlassen des Rohres ertheilt. Da nun der Gasdruck des Pulvers für die aus Geschoss, Kanone und Lafette bestehende Massengruppe eine innere Kraft ist, so muss, wenn äussere Kräfte von bedeutender Grösse in wagerechter Richtung nicht auftreten, der Gesamtschwerpunkt an der ursprünglichen Stelle verbleiben, oder es muss die Bewegungsgrösse in der Richtung des als nahehezu wagerecht gedachten Rohres Null verbleiben (S. 173). Es werden daher Kanone und Lafette zu einem Rücklaufe mit der Geschwindigkeit  $v_1$  veranlasst. Ist  $M$  die Masse, welche das Rohr mit der Geschwindigkeit  $v$  verlässt,  $M_1$  die Masse der Kanone und Lafette, so muss

$$- M_1 v_1 + Mv = 0, \text{ also}$$

$$1) \quad v_1 = \frac{M}{M_1} v \text{ sein.}$$

Die relative Geschwindigkeit des Geschosses in Bezug auf die zurücklaufende Kanone ist offenbar

$$w = v + v_1 = v \left( 1 + \frac{M}{M_1} \right).$$

Da das Rohr vom Halbmesser  $r$  schraubenlinienförmige Züge vom Anstiegswinkel  $\alpha$  und der Ganghöhe oder dem Drall  $h$  besitzt, so entspricht der Verschiebungsgeschwindigkeit

$$w = v \left( 1 + \frac{M}{M_1} \right)$$

noch eine Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$  von der Grösse

$$2) \quad \varphi = \frac{v}{r \cdot \operatorname{tg} \alpha} \left( 1 + \frac{M}{M_1} \right) = \frac{v \cdot 2 \pi}{h} \left( 1 + \frac{M}{M_1} \right).$$

Ist nun  $\mu$  die auf die Längsachse und den Abstand  $r$  bezogene Masse des Geschosses, so ist das gesammte Arbeitsvermögen in

dem Augenblicke, wo das Geschoss aus dem Rohre tritt, gleich der Ausdehnungsarbeit  $\mathfrak{A}$  der Pulvergase im Rohre, d. h.

$$\mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{\mu \cdot r^2 \varphi^2}{2} \quad \text{oder}$$

$$3) \quad \mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2} \left\{ 1 + \frac{M_1}{M} + \frac{\mu}{M} \frac{4r^2 \pi^2}{h^2} \left( 1 + \frac{M}{M_1} \right)^2 \right\}.$$

Ist  $l$  die nutzbare Rohrlänge, so ergibt sich die mittlere Triebkraft des Pulvers zu

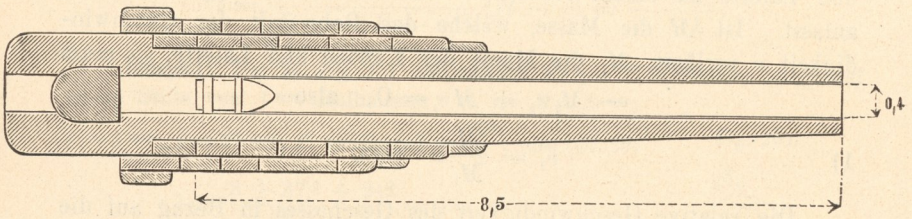
$$4) \quad K = \frac{\mathfrak{A}}{l}$$

und der mittlere Gasdruck zu

$$5) \quad p = \frac{\mathfrak{A}}{r^2 \pi l} = \frac{K}{r^2 \pi}.$$

**Beispiel:** Eine grosse Krupp'sche Kanone von 0,4 m lichter Weite und  $l = 8,5$  m nutzbarer Rohrlänge (Fig. 202) ertheile mit 200 kg Pulverladung dem

Fig. 202.



Geschosse von 1 m Länge und 700 kg Gewicht eine Geschwindigkeit  $v = 500$  m/s. Das Rohr wiege 70 000 kg, die Lafette 40 000 kg. Der Drall der Züge betrage  $h = 18$  m.

Die Pulvergase treten zwar nicht durchweg mit der Geschwindigkeit  $v$  aus dem Rohre, aber doch der vorderste Theil derselben; daher wird man bei der Berechnung der Bewegungsgrösse die Hälfte der Masse des Pulvers, bei derjenigen des Arbeitsvermögens ein Drittel dieser Masse mit zu  $M$  rechnen dürfen. Sonach ist die Geschwindigkeit des Rücklaufes

$$v_1 = 500 \cdot \frac{700 + 100}{70\,000 + 40\,000} = 3,6 \text{ m/s.}$$

Wollte man den Rücklauf ganz verhindern, so müsste man eine Widerstandskraft  $= K$  (Gl. 4) wirken lassen; diese steht aber gewöhnlich nicht zur Verfügung. Übrigens beträgt auch derjenige Theil des Rücklaufes, während dessen die volle Pulverkraft das Rohr zurücktreibt, nur

$$l \cdot \frac{M}{M + M_1} = \frac{8,5 \cdot 800}{110\,000 + 800} = 0,061 \text{ m.}$$

Das entstandene Arbeitsvermögen der Kanone nebst Lafette

$$\frac{M_1 v_1^2}{2} = 110\,000 \cdot \frac{3,6^2}{2g} = 72\,660 \text{ mkg}$$

wird dann durch geeignete Bremsvorrichtungen aufgezehrt.

Die auf die Längsachse und den Abstand  $r$  bezogene Masse des Geschosses möge zu der Hälfte der Masse des Geschosses, also zu  $\mu = \frac{350}{g}$  geschätzt werden. Dann ist die Arbeit der Pulvergase:

$$\mathfrak{A} = \left(700 + \frac{200}{3}\right) \frac{500^2}{2g} \left\{1 + \frac{800^2}{767 \cdot 110\,000} + \frac{350}{767} \cdot \frac{4 \cdot 0,2^2 \cdot \pi^2}{18^2} (1,0072)^2\right\},$$

$$\mathfrak{A} = 9\,768\,943 (1 + 0,0076 + 0,0025) = 9\,768\,943 \cdot 1,0101,$$

$$\mathfrak{A} = 9\,867\,609 \text{ mkg},$$

die mittlere Triebkraft des Pulvers

$$K = \frac{9\,867\,609}{8,5} = 1\,161\,000 \text{ kg},$$

der mittlere Druck (mit  $20^2 \pi = 1257$ )

$$\frac{1\,161\,000}{1257} = 923 \text{ kg/qcm} = 923 \text{ at.}$$

Das Einpressen des Geschossmantels in die Züge und die Reibung erhöhen den mittleren Druck noch um etwa  $\frac{1}{4}$ , d. h. um  $231 \text{ at}$ , auf  $1154 \text{ at}$ .

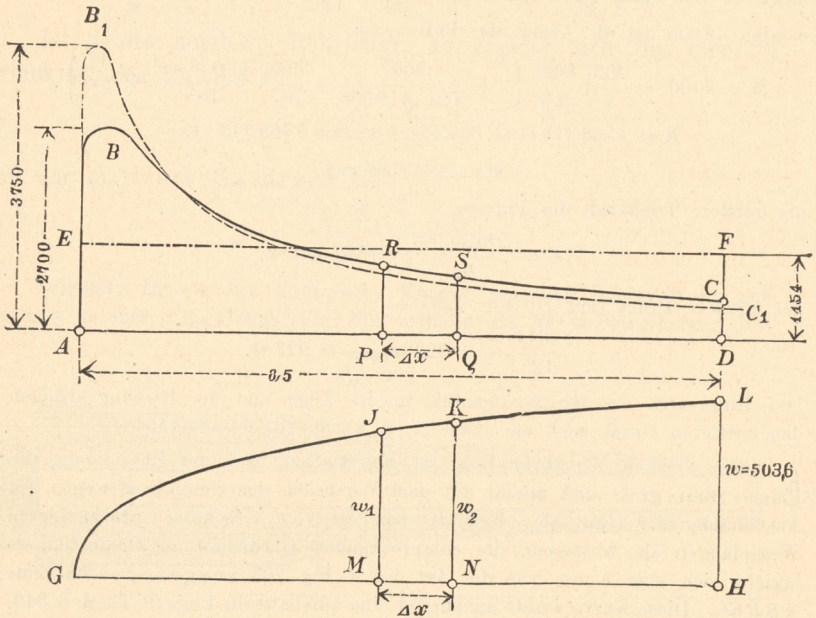
Der wirkliche Druck im Rohr ist unmittelbar nach der Entzündung des Pulvers sehr gross und nimmt mit dem Vorrücken des Geschosses wegen der Ausdehnung der Gase ab. Benutzt man die vom Geschosse zurückgelegten Wegelängen als Abscissen, die entsprechenden Gasdrücke als Ordinaten, so ergibt sich eine Kurve von der Art der in Fig. 203 ausgezogenen Linie  $ABRSC$ . Diese Kurve würde annähernd eine adiabatische Linie (2. Theil, S. 340) sein, wenn die ganze Pulvermenge sich gleichzeitig entzündete. Da aber stets ein gewisses Nachbrennen erfolgt, so wird dadurch die Kurve beeinflusst. Weil neuere Versuchsergebnisse bezüglich dieser Linie uns nicht zur Verfügung standen, haben wir den abfallenden Theil derselben als gleichseitige Hyperbel angenommen und so bemessen, dass die mit dem Flächeninhalte des Rohrquerschnittes multiplicirte Fläche  $ABRSCD$  die Gesamtarbeit der Pulvergase darstellt, dass also die Fläche gleiche Grösse hat mit dem Rechteck  $AEPD$ , dessen Höhe dem mittleren Druck  $1154 \text{ at}$  entspricht. Der grösste Druck, den der hintere Theil des Rohres auszuhalten hat, beträgt etwa  $2700 \text{ at}$ . Ein schneller verbrennendes Pulver erzeugt eine Druckkurve von der Form der in Fig. 203 gestrichelten Linie  $AB_1C_1$  mit einer grössten Druckordinate von etwa  $3750 \text{ at}$ , welche dann aber bald stark abfällt, da ihre Fläche unter Annahme derselben Austrittsgeschwindigkeit des Geschosses von  $500 \text{ m/s}$ , den gleichen Werth haben muss wie die Fläche der ausgezogenen Druckkurve. Damit das Geschütz diese gewaltigen Drücke aushalten könne, ist der hintere Theil des eigentlichen Rohres durch mehrere Lagen warm aufgezogener Ringe (Fig. 202) verstärkt.



Es besteht eine bestimmte Beziehung zwischen der Druckkurve und der Art der Bewegung des Geschosses im Rohre.

Da wir den rechnermässigen erforderlichen mittleren Druck mit Rücksicht auf die Widerstände um  $\frac{1}{4}$  erhöht haben, so folgt umgekehrt, dass von der

Fig. 203.



Gesamtarbeit der Pulvergase nur 80 % auf die Bewegung übertragen werden, so dass stattfinden muss, wenn die ausgezogene Druckkurve benutzt und ihre Fläche  $ABRSCD = F$  gesetzt wird,  $0,8 r^2 \pi \cdot F = \mathfrak{A}$ .

Schreibt man nun

$$\mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2} \alpha$$

(mit  $\alpha = 1,0101$  in dem Zahlenbeispiele), so wird

$$v^2 = \frac{2 r^2 \pi \cdot 0,8}{M \cdot \alpha} F.$$

Da die scheinbare (relative) Geschwindigkeit des Geschosses in Bezug auf das Rohr

$$w = v \left( 1 + \frac{M}{M_1} \right) \text{ ist,}$$

so wird

$$w^2 = \frac{2 r^2 \pi \cdot 0,8}{M \cdot \alpha} \left( 1 + \frac{M}{M_1} \right)^2 F.$$

Entspricht nun einer Wegeslänge  $x = AP$  (Fig. 203) die scheinbare Geschwindigkeit  $w_1$ , dem Werthe  $x + \Delta x$  die Geschwindigkeit  $w_2$ , so muss entsprechend vorstehender Gleichung auch gelten

$$w_2^2 - w_1^2 = \frac{2 r^2 \pi \cdot 0,8}{M \cdot \alpha} \left( 1 + \frac{M}{M_1} \right) \Delta F,$$

wenn  $\Delta F = PRSQ$  ist. Dies giebt für den vorliegenden Fall

$$w_2^2 - w_1^2 = \frac{2 \cdot g \cdot 1257 \cdot 0,8}{767 \cdot 1,0101} 1,0072^2 \cdot \Delta F = 25,83 \Delta F.$$

Mittels dieser Gleichung lässt sich die Geschwindigkeit  $w_x$  an verschiedenen Stellen des Rohres berechnen und durch die Kurve  $GJKL$  (Fig. 203, unten) darstellen.

In der Darstellung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit (Fig. 204) muss die dem Zeitraume  $\Delta t$  entsprechende Fläche

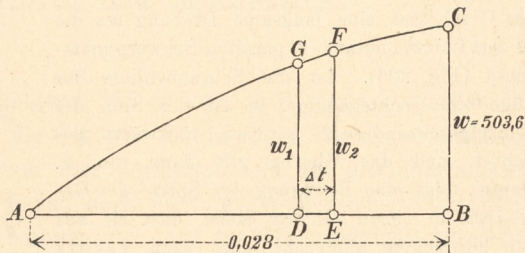
$$DEFG = \Delta x,$$

daher annähernd

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(w_1 + w_2)}$$

sein. Hiernach kann man die Zeittheile berechnen, die zu den einzelnen Geschwindigkeits-Zunahmen erforderlich sind, und erhält zugleich die Geschwindigkeitskurve  $AGFC$  (Fig. 204) und die Gesamtzeit  $0,028$  s. für die Zurücklegung des  $8,5$  m langen Weges im Rohre. Die mittlere Geschwindigkeit im Rohr ist sonach  $8,5 : 0,028 = 303,6$  m/s.

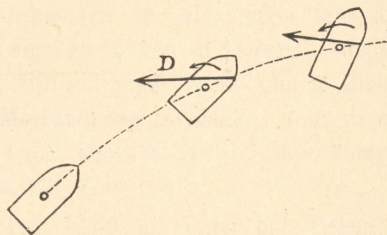
Fig. 204.



### Seitliche Ablenkung des Geschosses in Folge seiner Drehung und des Luftwiderstandes.

Hätte das Geschoss beim Verlassen des Rohres keine Winkelgeschwindigkeit, so würde es im luftleeren Raume stets seiner Anfangslage parallel bleiben, in der Atmosphäre aber durch den Widerstand  $D$  derselben, welcher bei der üblichen Geschossform oberhalb des Schwerpunktes vorbeigeht, eine derartige Drehung (linksherum in der Fig. 205) erfahren, dass es in eine höchst ungünstige Richtung zur Flugbahn des Schwerpunktes gelangen würde. Die bedeutende Winkelgeschwindigkeit nun, welche die schraubenlinien-förmigen Züge des Rohres dem

Fig. 205.



Geschoss ertheilen, verhindert das Überschlagen des Geschosses in ähnlicher Weise, wie die schnelle Drehung eines Kreisels dem Umfallen desselben entgegenwirkt. Überträgt man die Erscheinungen bei der Drehung des Kreisels um den unteren Endpunkt der Achse sinngemäss auf die Drehung des Geschosses um seinen Schwerpunkt, so ergibt sich Folgendes: Sobald die Achse des mit grosser Geschwindigkeit  $\varphi$  in Drehung gesetzten Kreisels etwas schief gegen die Richtung der Schwere steht, so dass sein Gewicht nicht durch den Drehpunkt geht, beschreibt die Achse des Kreisels, statt umzufallen, einen fein gerippten Kegel, dessen Achse durch den Drehpunkt geht und parallel der Richtung des Gewichtes ist, mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (S. 221). Dem entsprechend erfährt die Achse des Geschosses eine langsame Drehung um die zu dem Luftwiderstand  $D$  parallele Schwerpunktsachse (Fig. 206). Ist die Schraubenlinie der Züge eine rechtsgängige, so ist der Sinn der Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$  nach rückwärts gerichtet, und das Gleiche gilt dann von  $\omega$ . Daraus folgt eine Bewegung der Spitze des Geschosses in einem solchen Sinne, dass sie aus der lothrechten Zielebene eine nach rechts gerichtete Ablenkung erfährt. Hierdurch bekommt nun der Luftwiderstand auch im Grundriss eine schiefe Richtung gegen das Geschoss, so dass auch dessen Schwerpunkt nun nach rechts aus der Zielebene hinausgedrängt wird. Freilich ändert die Richtung des Luftwiderstandes  $D$  mit der Drehung des Geschosses fortwährend seine Richtung, und die Kreiselung wird in Folge dessen eine sehr unregelmässige. Daher werden auf die erste Ablenkung nach rechts bald solche nach unten, nach links und nach oben folgen. Weil aber das Geschoss bei der ersten Ablenkung noch die grösste Geschwindigkeit hat, so ist diese von überwiegendem Einfluss. Erfahrungsmässig zeigen dann auch alle Geschosse aus rechtsgängig gezogenen Rohren eine nach rechts gerichtete Abweichung aus der lothrechten Zielebene. (Vergl. die hiervon unabhängige Abweichung wegen der Drehung der Erde, S. 143.)

Fig. 206.

