für die ganze augenblickliche Aussenschale von der Dicke dx also, wenn man deren Masse $\frac{\gamma}{g} \cdot 4\, x^2 \pi \cdot dx$ für m einführt:

$$dV = -\, k \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{3} \pi^2 x^4 dx.$$

Integrirt man dies von $x = 0$ bis $x = R$, so ergiebt sich das Selbstpotential zu

$$V = -\, k \cdot \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{15} \pi^2 R^5,$$

oder kürzer, weil $M^2 = \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{9} R^6 \pi^2$ ist,

13) $$V = -\frac{3}{5} k \frac{M^2}{R}.$$

Die gleiche Arbeit in positivem Sinne wird geleistet, wenn eine unendlich vertheilte Masse M unter Einwirkung der gegenseitigen Massenanziehung sich zu einer Kugel vom Halbmesser R verdichtet. Diese bei dem Ballungsvorgange geleistete Arbeit setzt sich in dem Verhältnisse

$$424^{\,\mathrm{mkg}} \equiv 1 \text{ Wärmeeinheit}$$

(s. 2. Theil, S. 334) in Wärmemenge um und ertheilt der Kugel eine entsprechend hohe Temperatur.

6. Satz von der Momentensumme der Bewegungsgrössen einer Massengruppe.

Der Punkt m einer Massengruppe habe im Zeitpunkte t eine Geschwindigkeit v; es wirke auf ihn eine Gesammtkraft K. Diese ertheilt dem Punkt eine Beschleunigung $p = K : m$, und wenn man noch $p = du : dt$ setzt, so ist du die sog. Elementarbeschleunigung (s. 1. Theil, S. 24). Als Mittelgeschwindigkeit aus v und du erhält man dann nach Grösse, Richtung und Sinn die Geschwindigkeit $v + dv$ nach Verlauf eines Zeittheilchens dt. Nun gilt nach 1. Theil, S. 101 auch für die Geschwindigkeiten eines Punktes der Satz der statischen Momente, so dass in Bezug auf eine beliebige Achse O das Moment der Mittelgeschwindigkeit gleich der Momentensumme der Seitengeschwindigkeiten ist. Nehmen wir die Achse vorläufig rechtwinklig zur Ebene von v und K, so dass sie sich in dieser Ebene als Punkt O projicirt, so ist nach Fig. 151

$$(v + dv)\, r_1 = v \cdot r + du \cdot l, \quad \text{oder mit}$$

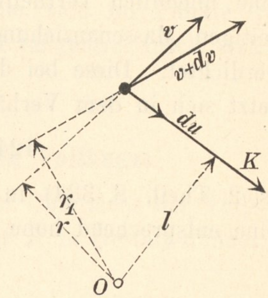
$$du = p \cdot dt = \frac{K}{m} \cdot dt:$$

$$(v + dv)\, r_1 - v \cdot r = \frac{K \cdot l}{m} \cdot dt \quad \text{und}$$

1) $$\frac{m\,(v + dv)\, r_1 - m \cdot v \cdot r}{dt} = K \cdot l.$$

Da nun $m \cdot v$ nach S. 171 die Bewegungsgrösse des Punktes m im Zeitpunkte t ist, so kann man $m \cdot v \cdot r$ das Moment der Bewegungsgrösse in Bezug auf die Achse O nennen, und ebenso $m\,(v + dv)\, r_1$ das Moment der Bewegungsgrösse nach dem Zeittheilchen dt. Die linke Seite der Gl. 1 ist also die Zunnahme des Momentes der Bewegungsgrösse, getheilt durch das entsprechende Zeittheilchen dt, kann daher als die Geschwindigkeit der Zunahme des Momentes der Bewegungsgrösse bezeichnet werden, die rechte Seite ist das Moment der Kraft K, bezogen auf dieselbe Achse O.

Fig. 151.



Ist aber die Achse O nicht rechtwinklig zu der durch die Geschwindigkeit v und die Kraft K bestimmten Ebene, so lege man eine Ebene E rechtwinklig zur Achse O; projicirt man dann die Geschwindigkeit v und die Kraft K auf die Ebene E und bezeichnet die Projektionen mit w bezw. P, so gilt für diese beiden eine der Gl. 1 entsprechende Beziehung, die man kürzer schreiben kann

2) $$\frac{d\,(m \cdot w \cdot r)}{dt} = P \cdot l.$$

Nach der Bedeutung des statischen Momentes (s. 1. Theil, S. 99/100) ist aber das Moment der wirklichen Geschwindigkeit v gleich dem Momente der Geschwindigkeitsprojektion w und das Moment der wirklichen Kraft K gleich demjenigen der Kraftprojektion P. Stellt man nun in Bezug auf irgend eine Achse O die Gl. 2 für jeden Punkt m der Massengruppe auf und zählt die Gleichungen zusammen, so kann man schreiben

$$3)\qquad \frac{d\,\Sigma m w r}{dt} = \Sigma P l = \mathfrak{M}.$$

Die Momente der inneren Kräfte der Massengruppe heben sich, da diese Kräfte paarweise gleich und entgegengesetzt auftreten, gegenseitig auf, so dass die rechte Seite der Gl. 3 mit der Momentensumme $\mathfrak{M}$ der äusseren Kräfte gleichbedeutend ist; daher hat man den Satz:

Für irgend eine Massengruppe ist die Geschwindigkeit der Zunahme der Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf irgend eine Achse gleich der Momentensumme aller äusseren Kräfte der Massengruppe in Bezug auf dieselbe Achse. Ist in Bezug auf eine Achse die Momentensumme der äusseren Kräfte Null, so ist in Bezug auf dieselbe Achse die Momentensumme der Bewegungsgrössen konstant, d. h.

$$4)\qquad \Sigma m w r = \text{Const.}$$

Ist die Massengruppe ein Körper, welcher sich derartig um eine feste Achse dreht, dass in einem Augenblicke sämmtliche Punkte übereinstimmende Winkelgeschwindigkeit ω haben, so wird in Bezug auf diese Achse $w = r \cdot \omega$, daher nach Gl. 3:

$$5)\qquad \frac{d\,(\omega\,\Sigma m r^2)}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Die Summe der Produkte der Massentheilchen m und der Quadrate ihrer Abstände r von einer festen Achse nennt man nach 1. Theil, S. 267 das **Trägheitsmoment**

$$J = \Sigma m r^2$$

des Körpers in Bezug auf die betreffende Achse. Daher wird Gl. 5:

$$6)\qquad \frac{d\,(\omega \cdot J)}{dt} = \mathfrak{M}.$$

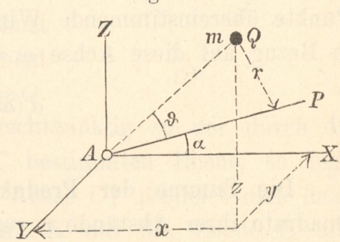
Ist $\mathfrak{M} = 0$, so wird $\omega \cdot J$ konstant. Würde also bei einem ohne äusseres Kraftmoment sich drehenden Körper das Trägheitsmoment sich ändern, so müsste die Winkelgeschwindigkeit ω sich umgekehrt ändern. Würde z. B. die Erde sich in Folge von Abkühlung zusammenziehen, so dass J sich verkleinerte, so müsste ihre Winkelgeschwindigkeit ω grösser werden. Der Umstand, dass zufolge astronomischer Beobachtungen, soweit dieselben zurückreichen, die Zeit der Umdrehung der Erde sich nicht merkbar geändert hat, lässt darauf schliessen, dass auch eine wesentliche Abkühlung der Erde in dieser Zeit nicht mehr erfolgt ist.

C. Bewegung starrer Körper.

I. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Richtung der Achse.

In einem starren Körper werde ein Punkt A gewählt, durch diesen ein rechtwinkliges Achsenkreuz gelegt und ausserdem eine Achse AP, welche mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet (Fig. 152). Hat ein Massentheilchen m die Koordinaten x, y, z und von der Achse AP den rechtwinkligen Abstand r, so liefert es zu dem Trägheitsmoment J des Körpers in Bezug auf die Achse AP den Beitrag

Fig. 152.



$$dJ = m \cdot r^2.$$

Die Verbindungsgerade AQ von A nach dem Massenpunkt m bilde mit AP den Winkel ϑ; dann ist

$$r = AQ \cdot \sin\vartheta, \quad \text{mithin}$$

1) $$dJ = m \cdot \overline{AQ}^2 \sin^2\vartheta = m \cdot \overline{AQ}^2 (1 - \cos^2\vartheta).$$

Hat AQ die Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1, so gilt für den Winkel ϑ zwischen den Geraden AQ und AP nach den Lehren der Analytischen Geometrie des Raumes (vergl. 2. Theil, S. 226) die Beziehung

$$\cos\vartheta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1.$$