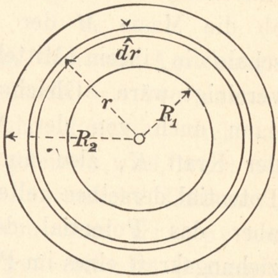
b) Potential einer gleichartigen Hohlkugel von endlicher Wandstärke.

Der innere Halbmesser sei R_1, der äussere R_2, die Masse sei M (Fig. 148). Man zerlege dieselbe in lauter koncentrische Schalen von unendlich geringer Wandstärke. Hat eine solche Schale einen Halbmesser r und eine Wandstärke dr, so ist ihre Masse

Fig. 148.



$$5) \qquad = \frac{\gamma}{g} \cdot 4\, r^2 \cdot \pi \cdot dr.$$

Da nun das Potential eines endlichen Körpers nach Gl. 2 in Form eines Integrals, d. h. einer Summe der Beiträge einzelner Massentheilchen erscheint und da diese Summationen für dünne Kugelschalen durch die Gl. 3 und 4 bereits ermittelt sind, so können nun die Beiträge, welche die einzelnen, die Hohlkugel bildenden Schalen zu den Potentialwerthen der Hohlkugel liefern, wiederum summirt werden, wobei nur stets diejenigen Kugelschalen, welche den Massenpunkt umschliessen, nach Gl. 4 zu behandeln sind, während für diejenigen Schalen, ausserhalb deren der Punkt sich befindet, Gl. 3 anzuwenden ist.

Für einen ausserhalb der Hohlkugel gelegenen Punkt m, d. h. für $l \geqq R_2$, gilt für alle dünnen Schalen übereinstimmend Gl. 3, daher wird

$$6) \qquad V_a = -\frac{km}{l}\int dM = -k\frac{mM}{l}.$$

(In V_a soll der Index a auf die Lage des Punktes l „ausserhalb“ hinweisen).

Für einen innerhalb des Hohlraumes der Hohlkugel befindlichen Punkt m, d. h. für $l \leqq R_1$, gilt für alle dünnen Schalen übereinstimmend Gl. 4, doch muss in derselben, da R für die einzelnen Schalen verschieden ist, das dortige

$$\frac{M}{R} \quad \text{mit} \quad \frac{\gamma}{g}\,\frac{4\, r^2 \pi \cdot dr}{r} = \frac{\gamma}{g}\, 4\, r \pi \cdot dr$$

vertauscht werden.

Man erhält dann für die ganze Hohlkugel

7) $$V_h = -k \cdot m \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot 4\pi \int_{R_1}^{R_2} r\,dr = -km\frac{\gamma}{g} \cdot 2\pi(R_2{}^2 - R_1{}^2).$$

(In V_h soll der Index h auf die Lage des Punktes im „Hohlraume" hinweisen.)

Für einen in der Wandung befindlichen Punkt m, d. h. für $R_2 > l > R_1$, ist für die dünnen Schalen, deren Halbmesser $r \leq l$, die Gl. 3, für die übrigen die Gl. 4 anzuwenden. Erstere liefern zum Potential der Hohlkugel, wenn man M mit $4\frac{\gamma}{g} \cdot r^2\pi \cdot dr$ vertauscht, den Beitrag

$$-\frac{km}{l}\, 4\frac{\gamma}{g}\pi \int_{R_1}^{l} r^2\,dr = -km\frac{4}{3}\,\frac{\gamma}{g}\pi\left(l^2 - \frac{R_1{}^3}{l}\right).$$

Die anderen liefern den Beitrag

$$-km\,4\frac{\gamma}{g}\pi \int_{l}^{R_2} r\,dr = -km\,2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \pi(R_2{}^2 - l^2).$$

Man erhält dann nach einfacher Zusammenziehung

8) $$V_w = -km \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot 2\pi\left(R_2{}^2 - \frac{l^2}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{R_1{}^3}{l}\right).$$

(In V_w soll der Index w auf die Lage des Punktes in der „Wandung" hinweisen.)

c) Potential einer gleichartigen Vollkugel vom Halbmesser R.

Man hat in den vorstehenden Gl. 6, 7, 8 nur $R_1 = 0$ und $R_2 = R$ zu setzen. Für einen ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt, d. h. für $l \geqq R$ wird einfach

9) $$V_a = -k\frac{mM}{l};$$

für einen im Inneren befindlichen Punkt (aus Gl. 8):

10) $$V_w = -k \cdot m \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot 2\pi\left(R^2 - \frac{l^2}{3}\right),$$

was mit $M = \frac{4}{3}\,\frac{\gamma}{g}R^3\pi$ auch geschrieben werden kann

11) $$V_w = -\frac{k \cdot m \cdot M}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{l^2}{2R^2}\right).$$