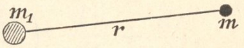
5. Potential einer Massengruppe.

Das Potential der Anziehungskraft $K = k\frac{m_1 m}{r^2}$ eines festen Centralpunktes m_1 (Fig. 145) in Bezug auf einen Massenpunkt m, welcher von m_1 den Abstand r hat ist nach S. 107,

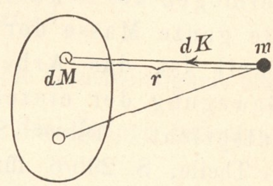
Fig. 145.



1) $$V = -k\frac{m_1 m}{r},$$

wenn k der Festwerth der Massenanziehung, d. h. die Anziehungskraft zwischen zwei Masseneinheiten im Abstande $= 1$ von einander (s. 1. Theil, S. 55) bedeutet, u. zw. ist das Potential diejenige Arbeit, welche von der Anziehungskraft geleistet wird, wenn der Massenpunkt aus dem Abstand r sich in unendliche Entfernung begiebt. Wird nun der Massenpunkt m von einer Gruppe von Massenpunkten, etwa von einem festen Körper mit der Gesammtmasse M, angezogen (Fig. 146), so ist die gesammte Anziehungskraft K, welche der Massenpunkt m von der Massengruppe M erfährt, die Mittelkraft der Anziehungskräfte dK, welche die einzelnen Theilchen dM auf m ausüben, wobei

Fig. 146.



$$dK = k \cdot \frac{dM \cdot m}{r^2}.$$

Bewegt sich der Massenpunkt auf irgend einem Wege von dem Körper fort bis in unendliche Entfernung, so verrichtet die Anziehungskraft eines Massentheilchens die Arbeit

$$dV = -k \cdot \frac{dM \cdot m}{r}.$$

Da nun bei der Bewegung eines Massenpunktes die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist (s. 1. Theil, S. 43), so verrichtet die gesammte Anziehungskraft K bei der Bewegung des Massenpunktes ins Unendliche die Arbeit

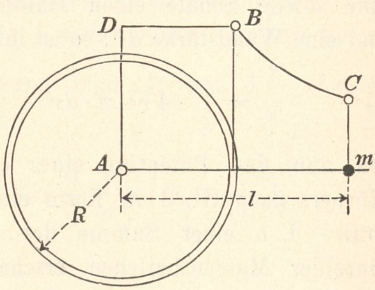
2) $$V = -k \cdot m \int \frac{dM}{r},$$

und diese Arbeit heisst das **Potential** der Massengruppe oder des Körpers M in Bezug auf den Punkt m.

a) Potential einer dünnen, gleichartigen Kugelschale vom Halbmesser R und der Masse M.

Befindet sich (Fig. 147) der Massenpunkt m im Abstand l vom Mittelpunkt A der Kugelschale, u. zw. ausserhalb derselben (mit $l \geqq R$), so ist (nach 1. Theil, S. 56) die gesammte Anziehungskraft K dieselbe, als ob die Masse M der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Gleiches muss dann auch von der Arbeit der Kraft K, also auch vom Potential derselben gelten. Da aber das Potential der Anziehungskraft eines im Punkt A befindlichen Massenpunktes M in Bezug auf den Punkt m nach S. 186

Fig. 147.



$$-k\frac{Mm}{l},$$

so muss auch das Potential der Kugelschale in Bezug auf den ausserhalb gelegenen Punkt m sein:

$$3) \qquad V = -k\frac{Mm}{l}.$$

Bei veränderlichem l ist die Darstellung des davon abhängigen V offenbar eine gleichseitige Hyperbel BC.

Befindet sich der Massenpunkt innerhalb der Kugelschale, ist also $l \leqq R$, so ist die Anziehungskraft der Kugelschale gegen den Punkt gleich Null (s. 1. Theil, S. 56/57). Bei der Bewegung des Punktes m in unendliche Ferne beginnt somit die Arbeitsverrichtung erst, sobald er die Kugelschale durchdringt. Daher ist das Potential für $l < R$ dasselbe wie für $l = R$. Setzt man also in Gl. 3 für l den Werth R ein, so wird

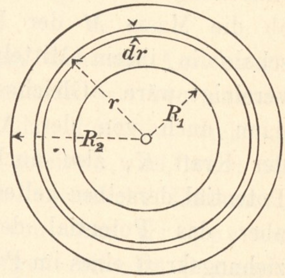
$$4) \qquad V = -\frac{kMm}{R}.$$

Das Potential der Kugelschale in Bezug auf einen irgendwo im Inneren derselben befindlichen Massenpunkt m ist somit konstant, dargestellt durch die Gerade BD (Fig. 147)

b) Potential einer gleichartigen Hohlkugel von endlicher Wandstärke.

Der innere Halbmesser sei R_1, der äussere R_2, die Masse sei M (Fig. 148). Man zerlege dieselbe in lauter koncentrische Schalen von unendlich geringer Wandstärke. Hat eine solche Schale einen Halbmesser r und eine Wandstärke dr, so ist ihre Masse

Fig. 148.



$$5) \qquad = \frac{\gamma}{g} \cdot 4 r^2 \cdot \pi \cdot dr .$$

Da nun das Potential eines endlichen Körpers nach Gl. 2 in Form eines Integrals, d. h. einer Summe der Beiträge einzelner Massentheilchen erscheint und da diese Summationen für dünne Kugelschalen durch die Gl. 3 und 4 bereits ermittelt sind, so können nun die Beiträge, welche die einzelnen, die Hohlkugel bildenden Schalen zu den Potentialwerthen der Hohlkugel liefern, wiederum summirt werden, wobei nur stets diejenigen Kugelschalen, welche den Massenpunkt umschliessen, nach Gl. 4 zu behandeln sind, während für diejenigen Schalen, ausserhalb deren der Punkt sich befindet, Gl. 3 anzuwenden ist.

Für einen ausserhalb der Hohlkugel gelegenen Punkt m, d. h. für $l \geqq R_2$, gilt für alle dünnen Schalen übereinstimmend Gl. 3, daher wird

$$6) \qquad V_a = -\frac{km}{l} \int dM = -k \frac{mM}{l} .$$

(In V_a soll der Index a auf die Lage des Punktes l „ausserhalb" hinweisen).

Für einen innerhalb des Hohlraumes der Hohlkugel befindlichen Punkt m, d. h. für $l \leqq R_1$, gilt für alle dünnen Schalen übereinstimmend Gl. 4, doch muss in derselben, da R für die einzelnen Schalen verschieden ist, das dortige

$$\frac{M}{R} \quad \text{mit} \quad \frac{\gamma}{g} \frac{4 r^2 \pi \cdot dr}{r} = \frac{\gamma}{g} 4 r \pi \cdot dr$$

vertauscht werden.

Man erhält dann für die ganze Hohlkugel

$$7)\qquad V_h = -k\cdot m\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot 4\pi\int_{R_1}^{R_2} r\,dr = -km\frac{\gamma}{g}\cdot 2\pi(R_2^2 - R_1^2).$$

(In V_h soll der Index h auf die Lage des Punktes im „Hohlraume" hinweisen.)

Für einen in der Wandung befindlichen Punkt m, d. h. für $R_2 > l > R_1$, ist für die dünnen Schalen, deren Halbmesser $r \leq l$, die Gl. 3, für die übrigen die Gl. 4 anzuwenden. Erstere liefern zum Potential der Hohlkugel, wenn man M mit $4\frac{\gamma}{g}\cdot r^2\pi\cdot dr$ vertauscht, den Beitrag

$$-\frac{km}{l}4\frac{\gamma}{g}\pi\int_{R_1}^{l} r^2\,dr = -km\frac{4}{3}\frac{\gamma}{g}\pi\left(l^2 - \frac{R_1^3}{l}\right).$$

Die anderen liefern den Beitrag

$$-km4\frac{\gamma}{g}\pi\int_{l}^{R_2} r\,dr = -km2\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\pi(R_2^2 - l^2).$$

Man erhält dann nach einfacher Zusammenziehung

$$8)\qquad V_w = -km\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot 2\pi\left(R_2^2 - \frac{l^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{R_1^3}{l}\right).$$

(In V_w soll der Index w auf die Lage des Punktes in der „Wandung" hinweisen.)

c) Potential einer gleichartigen Vollkugel vom Halbmesser R.

Man hat in den vorstehenden Gl. 6, 7, 8 nur $R_1 = 0$ und $R_2 = R$ zu setzen. Für einen ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt, d. h. für $l \geqq R$ wird einfach

$$9)\qquad V_a = -k\frac{mM}{l};$$

für einen im Inneren befindlichen Punkt (aus Gl. 8):

$$10)\qquad V_w = -k\cdot m\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot 2\pi\left(R^2 - \frac{l^2}{3}\right),$$

was mit $M = \frac{4}{3}\frac{\gamma}{g}R^3\pi$ auch geschrieben werden kann

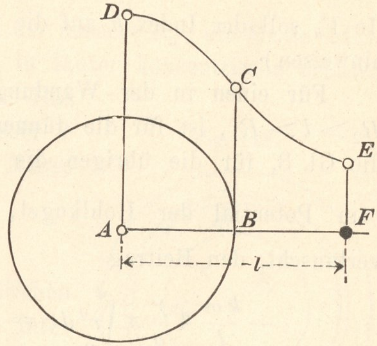
$$11)\qquad V_w = -\frac{k\cdot m\cdot M}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{l^2}{2R^2}\right).$$

Für einen Punkt m im Mittelpunkte der Kugel giebt $l = 0$ in Gl. 11

$$V_w = -\frac{kmM}{R}\cdot\frac{3}{2}$$

$= AD$ in Fig. 149.

Fig. 149.



Für einen Punkt m an der Oberfläche der Kugel giebt $l = R$ in Gl. 9 u. 11 übereinstimmend

$$12)\quad V_w = -\frac{kmM}{R} = BC$$

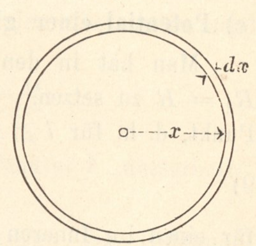
in Fig. 148.

Trägt man V_a und V_w als Ordinaten auf, so erhält man die gleichseitige Hyperbel CE der Gl. 9, welcher sich im Punkte C die Parabel DC der Gl. 11 mit der Achse DA tangential anschliesst.

d) Selbstpotential einer gleichartigen Vollkugel.

Werden die einzelnen Massentheilchen der Oberfläche der Vollkugel von der Masse M und dem Halbmesser R in Gestalt dünner Schalen von der Kugel abgelöst und in unendliche Entfernung gebracht, so dass der Halbmesser der Vollkugel sich allmählich verkleinert, bis er zu Null geworden ist, so nennt man die bei dieser Zertheilung oder Zerstäubung der Kugel ins Unendliche von den Anziehungskräften verrichtete Arbeit das **Selbstpotential** der Kugel. Ist die Kugel bereits bis auf einen Halbmesser x verkleinert (Fig. 150), so beträgt für jedes Massentheilchen ihrer Oberfläche das Potential nach Gl. 12, wenn man darin R mit x und M mit $\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{4}{3}x^3\pi$ vertauscht:

Fig. 150.



$$-km\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{4}{3}\pi x^2,$$

für die ganze augenblickliche Aussenschale von der Dicke dx also, wenn man deren Masse $\frac{\gamma}{g} \cdot 4 x^2 \pi \cdot dx$ für m einführt:

$$dV = -k \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{3} \pi^2 x^4 dx.$$

Integrirt man dies von $x = 0$ bis $x = R$, so ergiebt sich das Selbstpotential zu

$$V = -k \cdot \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{15} \pi^2 R^5,$$

oder kürzer, weil $M^2 = \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{9} R^6 \pi^2$ ist,

13) $$V = -\frac{3}{5} k \frac{M^2}{R}.$$

Die gleiche Arbeit in positivem Sinne wird geleistet, wenn eine unendlich vertheilte Masse M unter Einwirkung der gegenseitigen Massenanziehung sich zu einer Kugel vom Halbmesser R verdichtet. Diese bei dem Ballungsvorgange geleistete Arbeit setzt sich in dem Verhältnisse

$$424^{\text{mkg}} \equiv 1 \text{ Wärmeeinheit}$$

(s. 2. Theil, S. 334) in Wärmemenge um und ertheilt der Kugel eine entsprechend hohe Temperatur.

6. Satz von der Momentensumme der Bewegungsgrössen einer Massengruppe.

Der Punkt m einer Massengruppe habe im Zeitpunkte t eine Geschwindigkeit v; es wirke auf ihn eine Gesammtkraft K. Diese ertheilt dem Punkt eine Beschleunigung $p = K : m$, und wenn man noch $p = du : dt$ setzt, so ist du die sog. Elementarbeschleunigung (s. 1. Theil, S. 24). Als Mittelgeschwindigkeit aus v und du erhält man dann nach Grösse, Richtung und Sinn die Geschwindigkeit $v + dv$ nach Verlauf eines Zeittheilchens dt. Nun gilt nach 1. Theil, S. 101 auch für die Geschwindigkeiten eines Punktes der Satz der statischen Momente, so dass in Bezug auf eine beliebige Achse O das Moment der Mittelgeschwindigkeit gleich der Momentensumme der Seitengeschwindigkeiten ist. Nehmen