Hieraus folgt

7) $$\frac{\gamma}{g} F \frac{c^2 - v^2}{2 z^2} \cdot 0{,}236\, z^2 a = \frac{3}{2} \frac{E \cdot J \cdot z^2}{a^3} \quad \text{und}$$

$$v^2 = c^2 - 12{,}71 \frac{E \cdot J \cdot g}{a^4 \gamma \cdot F} z^2.$$

Dies entspricht nach S. 54 mit

8) $$k^2 = 12{,}71 \frac{E \cdot J \cdot g}{a^4 \gamma \cdot F}$$

der Geschwindigkeitsgleichung einer geradlinigen Schwingung des Stabendes Q. Mithin ist die Schwingungslänge nach S. 58

9) $$l = \frac{g}{k^2} = \frac{a^4 \gamma \cdot F}{12{,}71\, E \cdot J} = 0{,}63 f, \quad \text{wenn}$$

$$f = \frac{\gamma \cdot F \cdot a^4}{8 E \cdot J}$$

die Durchbiegung unter dem eigenen Gewichte des Stabes bedeutet. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist nach S. 58

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \cdot a^2 \sqrt{\frac{\gamma \cdot F}{12{,}71\, E \cdot J \cdot g}} = a^2 \sqrt{\frac{0{,}777\, \gamma \cdot F}{E \cdot J \cdot g}},$$

oder mit $J = F \cdot i^2$:

10) $$t_1 = \frac{a^2}{i} \sqrt{\frac{0{,}777\, \gamma}{E \cdot g}}.$$

Für einen eingespannten Stahlstab rechteckigen Querschnittes von $a = 0{,}1$ m freier Länge und $h = 0{,}001$ m Dicke sei $\gamma = 7800$, $E = 2 \cdot 10^{10}$ kg/qm, dann wird wegen $i^2 = {}^1/_{12}\, h^2$ und $i = 0{,}289\, h$

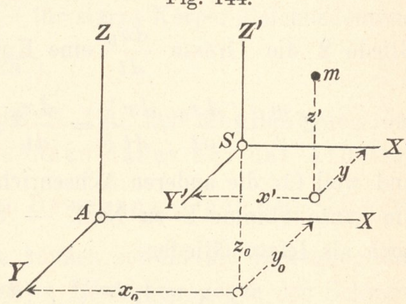
$$t_1 = \frac{0{,}01}{0{,}289 \cdot 0{,}001} \sqrt{\frac{0{,}777 \cdot 7800}{2 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81}} = 0{,}0061 \text{ Sekunden},$$

entsprechend 164 einfachen Schwingungen in der Sekunde.

4. Zerlegung des Arbeitsvermögens einer beliebigen Massengruppe.

Hat ein Massenpunkt m (Fig. 144) in Bezug auf ein festes Achsenkreuz AX, AY, AZ, die Koordinaten x, y, z und der Schwerpunkt S der ganzen Massengruppe die Koordinaten x_0, y_0, z_0, so denke man sich durch S ein Achsenkreuz SX', SY', SZ' gelegt, welches zu dem festen Achsenkreuze stets parallel bleibt, sich also mit dem Schwerpunkt S verschiebt.

Fig. 144.



Der Punkt m habe in Bezug auf das bewegliche Achsenkreuz die

Koordinaten x', y', z'. Wenn nun m von der Ebene $Y'SZ'$ um x', die Ebene $Y'SZ'$ von der Ebene YAZ um x_0 entfernt ist, so muss der Punkt m von der Ebene YAZ um $x = x_0 + x'$ entfernt sein. Daher hat man die Gleichungen:

$$x = x_0 + x'; \quad y = y_0 + y'; \quad z = z_0 + z'.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{dz'}{dt}.$$

Für die Geschwindigkeit v des Punktes m gilt aber bekanntlich

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2; \quad \text{daher wird}$$

$$1) \quad \Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt} + \frac{dz'}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Führt man die Quadrate der rechten Seite aus, so bekommt man einmal die Glieder

$$\Sigma \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2 \right\},$$

u. zw. ist diese Summe $= \frac{M \cdot u^2}{2}$, wenn u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S und M die ganze Masse der Gruppe bedeutet. Ferner entstehen die Glieder

$$2) \quad \Sigma \frac{m}{2} \left\{ 2 \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt} + 2 \frac{dy_0}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} + 2 \frac{dz_0}{dt} \cdot \frac{dz'}{dt} \right\}.$$

Nun ist aber in Bezug auf die Schwerpunktsebene $Y'SZ'$ der Werth $\Sigma m x' = 0$, mithin auch $\Sigma m \frac{dx'}{dt} = 0$. Da ferner in dem Gliede 2 die Grösse $\frac{dx_0}{dt}$ eine Konstante bedeutet, so wird

$$\Sigma \frac{m}{2} \left(2 \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt}\right) = \frac{dx_0}{dt} \Sigma m \frac{dx'}{dt}, \quad \text{mithin} = 0,$$

und weil für die anderen Achsenrichtungen das Gleiche gilt, so wird die ganze Summe 2 zu Null. — Schliesslich erhält man in Gl. 1 noch als letzte Glieder:

$$\Sigma \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Nennt man aber w die relative Geschwindigkeit des Punktes m in Bezug auf den Schwerpunkt S der Massengruppe, so sind

$$\frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt}$$

die Seitengeschwindigkeiten von w, also

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 = w^2,$$

so dass die letzte Summe einfach $\Sigma \frac{m}{2} w^2$ geschrieben werden kann. Hiernach wird

$$3) \qquad \Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{M}{2} u^2 + \Sigma \frac{m w^2}{2},$$

d. h. es kann das Arbeitsvermögen einer Massengruppe in zwei Theile zerlegt werden: der eine Theil ist das Arbeitsvermögen des Schwerpunktes, wenn man sich in demselben die ganze Masse der Gruppe vereinigt denkt; der andere Theil ist das Arbeitsvermögen, welches der relativen Bewegung der einzelnen Punkte gegen den Schwerpunkt entspricht. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des im 1. Theile, S. 295/6 für starre Körper bewiesenen; bei starren Körpern kann die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt nur in einer Drehung um denselben bestehen, und diese kann nach S. 23 für jeden Zeitpunkt als Drehung um eine durch den Schwerpunkt gelegte augenblickliche Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω aufgefasst werden, so dass $\Sigma \frac{m w^2}{2}$ für starre Körper gleichbedeutend ist mit $\frac{1}{2} J \omega^2$ (s. 1. Theil, S. 267).

Innere Kräfte haben nach S. 170 auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss, können daher nur das Arbeitsvermögen $\Sigma \frac{m w^2}{2}$ der relativen Bewegung gegen den Schwerpunkt ändern. Äussere Kräfte können sowohl die Bewegung des Schwerpunktes wie auch die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt beeinflussen.