Führt man die Quadrate aus, bedenkt, das x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 konstant, dass $\Sigma m x = M x_0$ u. s. w. geschrieben werden kann, so ergiebt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$\begin{aligned} W - W_0 &= M(x_1{}^2 - 2 x_1 x_0 + x_0{}^2) \\ &+ M(y_1{}^2 - 2 y_1 y_0 + y_0{}^2) \\ &+ M(z_1{}^2 - 2 z_1 z_0 + z_0{}^2) \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$W - W_0 = M\left\{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2\right\}.$$

Nennt man aber e den Abstand der beiden Punkte B und S, so ist

$$e^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2, \quad \text{daher}$$

$$W - W_0 = M e^2.$$

Da dies wegen des Quadrates $\geqq 0$, so ist stets $W \geqq W_0$ und erreicht seinen kleinsten Werth Null für $e = 0$, d. h. wenn B mit S zusammenfällt.

3. Der Satz des Arbeitsvermögens.

Ist c die Anfangs-, v die Endgeschwindigkeit eines Massenpunktes m einer Massengruppe, so ist nach 1. Theil, S. 143

$$1) \qquad \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i,$$

wenn $\Sigma \mathfrak{A}_k$ und $\Sigma \mathfrak{A}_i$ die Arbeitssumme der äusseren bezw. inneren Kräfte der Gruppe bedeuten, oder:

Die Zunahme des Arbeitsvermögens einer Massengruppe ist gleich der Arbeitssumme der äusseren und der inneren Kräfte.

Befinden sich unter den äusseren oder inneren Kräften sog. Bedingungskräfte (s. S. 153), deren Wirkung sich durch gewisse geometrische Bedingungsgleichungen für die Bewegung der Massengruppe ausdrücken lässt, so verrichten diese bei jeder virtuellen Verrückung, mithin auch bei der wirklichen Bewegung nach S. 154 eine Arbeit gleich Null, können also bei der Aufstellung der Arbeitssumme unberücksichtigt bleiben. Dahin gehören nach S. 155 und 1. Theil, S. 144 die inneren Kräfte starrer Körper, ebenso auch nach 2. Theil, S. 231 die inneren Kräfte tropfbar flüssiger Körper, für welche die Bedingung unveränderlichen Rauminhalts besteht und bei der Bewegung durch ein Gefäss noch die Bedingung, dass

Querschnitt mal Geschwindigkeit für alle Theile des Gefässes in irgend einem Zeitpunkte den gleichen Werth haben. Dahin gehören auch nach S. 156 die inneren Kräfte eines Maschinengetriebes. Dieser Satz, dass die Arbeit der Bedingungskräfte Null sei, gilt aber nur, solange diese Kräfte endliche Grösse haben. In solchen Fällen jedoch, wo zur Aufrechterhaltung der Bedingungen unendlich grosse Kräfte erforderlich werden, erscheint ihre Arbeit in der Form $\infty \cdot 0$ und muss durch besondere Verfahren näher bestimmt werden. Mit derartigen Fällen hat man es stets zu thun, wenn die Bedingungen der in Bewegung befindlichen Massengruppe plötzliche Geschwindigkeits-Änderungen erfordern. Diese sind nur durch unendlich grosse Kräfte zu bewirken, und da es unendlich grosse Kräfte an einer endlichen Massengruppe in Wirklichkeit nicht giebt, so werden die entsprechenden Bedingungen thatsächlich nicht in aller Schärfe, sondern nur annäherungsweise gültig bleiben.

Diese Betrachtung findet auf alle Fälle Anwendung, wo als starr angenommene Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten zusammenstossen. Würden die Körper beim Stosse völlig starr bleiben, so müssten zwischen ihnen und in ihrem Inneren unendlich grosse Kräfte auftreten; in Wirklichkeit aber werden zusammenstossende feste Körper gewisse Formänderungen erfahren, und die inneren Kräfte werden beim Stosse Arbeiten leisten, die (s. 2. Theil, S. 129 u. ff.) sich nach dem Verhalten der Körper während des Stosses richten und in den meisten Fällen negativ gefunden werden. Ähnlich verhält es sich bei der Bewegung des Wassers durch Gefässe mit plötzlichen Querschnittsänderungen (s. 2. Theil, S. 245). Auch in solchen Fällen werden die bei der Ableitung der der Grundgleichung I (2. Theil, S. 231) angenommenen Bedingungen nicht mehr scharf zutreffen, es wird daher auch die Arbeit der inneren Kräfte nicht mehr Null sein, sondern einen negativen Werth haben. Diese negativen Arbeiten, die sich durch einen Verlust an äusserem Arbeitsvermögen zu erkennen geben, verwandeln sich (nach 2. Theil, S. 334) in Wärme.

Der Satz der Arbeit gilt daher nur unter Berücksichtigung der durch etwaige Stösse veranlassten Arbeitsverluste.

Beispiel 1: Bewegung einer Kette. Ist eine Kette bei A (Fig. 140) derartig aufgewickelt oder niedergelegt, dass beim Abziehen des freien Endes B

kein Klemmen und keine Reibung entsteht, und wird dem bereits gerade gestreckten vorderen Theile von der Länge a eine wagerechte Geschwindigkeit c ertheilt, so wird, wenn äussere Kräfte nicht wirken, die Kette sich weiter abwickeln und an der Bewegung theilnehmen. Es soll berechnet werden, welche Geschwindigkeit v der gerade gestreckte Theil der Kette in einem Zeitpunkte hat, wo eine Länge x abgewickelt ist (Fig. 141). Hierbei muss nach dem

Fig. 140.

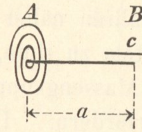
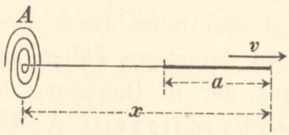


Fig. 141.



Satze vom Antriebe (S. 171) wegen des Fehlens äusserer Kräfte die Bewegungsgrösse stets den gleichen Werth behalten. Ist die Masse der Kette gleichmässig über deren Länge vertheilt, so kann man die Masse der Längeneinheit $= 1$ setzen. Zu Anfang war (Fig. 140) die gesammte Bewegungsgrösse $a \cdot c$; nachdem x Längeneinheiten die Geschwindigkeit v erhalten haben (Fig. 141), beträgt sie $x \cdot v$; daher wird

2) $$x \cdot v = a \cdot c, \quad \text{oder} \quad v = c \cdot \frac{a}{x}.$$

Setzt man nun $v = dx : dt$, so erhält man

$$x \cdot dx = a \cdot c \cdot dt$$

und daraus, weil $x = a$ für $t = 0$ werden muss,

3) $$x^2 = a^2 + 2\,act \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{a\,(a + 2\,ct)}.$$

Dies ist die Bewegungsgleichung, welche in Verbindung mit Gl. 2 die Geschwindigkeitsgleichung

4) $$v = \frac{c}{\sqrt{1 + 2\,\frac{c}{a}\,t}}$$

liefert. Nach Gl. 2 und 4 wird erst $v = 0$ für $x = \infty$ und für $t = \infty$. Das Abwickeln der Kette würde also bei Abwesenheit aller Widerstände niemals aufhören, wie gross auch die Länge der bei A (Fig 140) aufgeschichteten Kette sein mag. Diese Betrachtung gilt auch für den Fall, dass die ursprünglich mit der Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzte Kette von der Länge a mit einer steifen Stange, etwa einer Harpune vertauscht wird, welche gleiche Masse mit einer Ketten- oder Seillänge a hat und in Folge der ihr ertheilten Bewegungsgrösse $a \cdot c$ Kette oder Seil nach sich zieht. Auch auf einen s. g. Raketen-Apparat zur Rettung Schiffbrüchiger findet Gl. 4 Anwendung.

Man kann diese Aufgabe auch mittels des Satzes der Arbeit lösen. Würde man, da äussere Kräfte nicht wirken, unter der Annahme, dass die inneren Kräfte der undehnbar gedachten Kette keine Arbeit verrichten, die Änderung des Arbeitsvermögens = Null setzen, so müsste

$$\tfrac{1}{2}\, x v^2 = \tfrac{1}{2}\, a c^2, \quad \text{mithin}$$

$$v = c\sqrt{\frac{a}{x}}$$

sein, was mit Gl. 2 in Widerspruch steht und unrichtig ist, weil in jedem Zeittheilchen dt ein Kettenstück dx stossweisse aus der Geschwindigkeit Null in die Geschwindigkeit v des Kettenstückes x übergeführt wird. Hierbei erfolgt während der Zeit dt ein Verlust an Arbeitsvermögen, der (nach 2. Theil, S. 130, Gl. 11 bezw. 12) mit $M = x$; $M_1 = dx$; $c = v$; $c_1 = 0$; $k = 0$ sich zu

$$\text{5)} \qquad \frac{x \cdot dx}{x + dx}\, \frac{v^2}{2} = dx \cdot \frac{v^2}{2}$$

bestimmt. Das Arbeitsvermögen der Kette, $\tfrac{1}{2}\, x v^2$ erfährt während der Zeit dt eine Zunahme $\tfrac{1}{2}\, d\,(x v^2)$ und diese ist offenbar $= -\, dx \cdot \frac{v^2}{2}$ (Gl. 5) zu setzen. Da x und v beide mit t veränderlich sind, so wird aus

$$d\,(x v^2) = -\, dx \cdot v^2:$$

$$x \cdot 2\, v\, dv + v^2 \cdot dx = -\, v^2\, dx$$

$$2\, v\, dv \cdot x = -\, 2\, v^2 \cdot dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{dx}{x} = -\, \frac{dv}{v}, \quad \text{also}$$

$$\mathrm{l}\, x = \mathrm{l}\left(\frac{1}{v}\right) + C,$$

und, weil für $x = a$ sein muss $v = c$:

$$\mathrm{l}\, a = \left(\frac{1}{c}\right) + C, \quad \text{also}$$

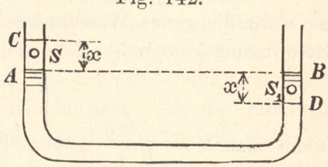
$$\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{c}{v}\right) \quad \text{und}$$

$$x = a \cdot \frac{c}{v},$$

was mit Gl. 2 übereinstimmt.

Beispiel 2: Schwingung des Wassers in einer gekrümmten Röhre. Das in einer nach Fig. 142 geformten Röhre befindliche Wasser bilde im Gleichgewichtszustande den Wasserspiegel AB. Der Querschnitt der Röhre sei F; sie sei auf eine Länge b mit Wasser gefüllt, so dass die Wassermenge das Gewicht $Mg = \gamma \cdot F \cdot b$ habe. Durch irgend eine Ursache werde der Ruhezustand des Wassers derartig gestört, dass das Wasser in der ruhenden Röhre mit der Geschwindigkeit c durch die Gleichgewichtslage hindurchgeht.

Fig. 142.



In dem Augenblicke, wo sich die

linksseitige Oberfläche bei C, die rechtsseitige bei D befindet, d. h. um x über bezw. unter der Gleichgewichtslage, sei die Geschwindigkeit der ganzen Wassermasse v; dann ist die Änderung des Arbeitsvermögens der Wassermasse von der Gleichgewichtslage ($x = 0$) bis zu der beliebigen Lage ($x = x$):

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot b \cdot \frac{v^2 - c^2}{2}.$$

Arbeit wird bei dieser Bewegung, wenn man die Reibung vernachlässigt, nur von der Schwerkraft verrichtet, denn die Druckkräfte der Röhre gegen das Gefäss stehen überall rechtwinklig zur Bewegung des Wassers längs der Wandungen, und die inneren Kräfte des Wassers verrichten in diesem Falle keine Arbeit, weil plötzliche Querschnittsänderungen nicht vorhanden sind und die Krümmungen mit genügend grossem Halbmesser angenommen werden (s. 2. Theil, S. 283). Die Arbeit der Schwere kann man am einfachsten berechnen, indem man sich das zwischen B und D ursprünglich vorhandene Wassergewicht $\gamma \cdot F \cdot x$ nach AC verrückt denkt, wobei der Schwerpunkt von S_1 nach S, d. h. um x gehoben wird. Dann ist die Arbeit $-\gamma \cdot F \cdot x^2$. Aus

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot b \frac{v^2 - c^2}{2} = -\gamma \cdot F \cdot x^2$$

ergiebt sich dann $$v = \sqrt{c^2 - \frac{2g}{b} x^2}.$$

Setzt man zugleich $$v = \frac{dx}{dt},$$ so wird

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{c^2 - \frac{2g}{b} x^2}}.$$

Wandelt man die rechte Seite um in

$$\sqrt{\frac{b}{2g}} \frac{d\left(\frac{x}{c}\sqrt{\frac{2g}{b}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2g}{b}\frac{x^2}{c^2}}},$$

so ergiebt die Integration

$$t = \sqrt{\frac{b}{2g}} \cdot \arcsin \frac{x}{c} \sqrt{\frac{2g}{b}},$$

wobei die Konstante verschwindet, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ sein muss.

Diese Gleichung für die Bewegung der beiden Wasserspiegel und somit auch für die ganze Wassermasse entspricht der Gl. 4, S. 54 für die geradlinige Schwingungsbewegung

$$t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{k}{c} \cdot x,$$

wenn man $k = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ setzt. Daher ist die Bewegung eine Schwingung um die Gleichgewichtslage als Mitte; die halbe Schwingungsweite, d. h. die grösste

Hebung und Senkung der beiden Wasserspiegel von der Gleichgewichtslage aus, beträgt (nach Gl. 8, S. 55)

$$a = \frac{c}{k} = c\sqrt{\frac{b}{2g}},$$

die Dauer einer einfachen Schwingung (nach Gl. 7, S. 55)

$$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{b}{2g}},$$

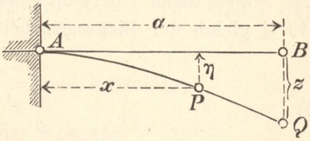
entsprechend einer Pendellänge $\frac{1}{2}b$.

Beispiel 3: Querschwingungen eines elastischen, eingespannten Stabes. Der Fall, wo ein eingespannter Stab am freien Ende eine Masse trägt, gegen welche die eigene Masse des Stabes vernachlässigt werden kann, und mit dieser Masse Querschwingungen ausführt, wurde auf S. 61 behandelt.

An dieser Stelle möge nun der Fall betrachtet werden, wo der prismatisch gedachte Stab nur mit seiner eigenen Masse schwingt.

In einem Zeitpunkte t habe die Mittellinie des Stabes die Form APQ (Fig. 143); der Punkt P weiche um η, der Endpunkt Q um z von der Form im spannungslosen Zustand AB ab; unter Vernachlässigung einer etwaigen Durchbiegung in Folge des eigenen Gewichtes ist AB auch die Gleichgewichtsform des Stabes.

Fig. 143.



Die Biegungslinie APQ ist zunächst unbekannt. Der beliebige Punkt P derselben hat eine aufwärts gerichtete Beschleunigung r; bringt man an jedem Massentheilchen $m = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot dx$ die abwärts gerichtete Ergänzungskraft $\frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot dx \cdot r$ an, so halten diese Kräfte den wirklich vorhandenen Kräften das Gleichgewicht; mithin ist APQ die Biegungslinie für eine ruhende stetige Belastung, welche an der beliebigen Stelle P für die Längeneinheit die Grösse

1) $$p = \frac{\gamma}{g} F \cdot r \quad \text{hat.}$$

Befindet sich die Schwingung des Stabes im Beharrungszustande, so erfolgt die Bewegung der Punkte P und Q nach ähnlichen Gesetzen, und da nun beide Punkte in der gleichen Zeit die verschiedenen Wegeslängen η und z durchlaufen, so müssen sowohl die Geschwindigkeiten wie auch die Beschleunigungen der Punkte P und Q den Wegen η und z proportional sein. Für die Geschwindigkeiten u und v, die Beschleunigungen r und q beider Punkte gilt daher

2) $$u = \frac{v}{z}\eta; \quad r = \frac{q}{z}\eta.$$

Hiernach ist die Ergänzungsbelastung bei P

$$p = \frac{\gamma}{g} F \frac{q}{z} \eta .$$

Nach S. 53, Gl. 3 von Keck's Elasticitätslehre wird, wenn man die für den vorliegenden Fall gültigen Vorzeichen beachtet,

$$3)\qquad EJ \frac{d^4 \eta}{dx^4} = p = \frac{\gamma}{g} F \frac{q}{z} \eta .$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung giebt die Gleichung der Biegungslinie APQ. Weil dieselbe aber transcendent und ziemlich verwickelter Form ist, so möge eine thunlichst einfache Annäherungslösung versucht werden. Da nämlich die dem wirklichen Verhalten entsprechende Belastung nach Mafsgabe der Fläche ABQ von der Einspannungsstelle nach dem freien Ende hin stark zunimmt, so wird von den einfachsten Belastungsfällen, deren Biegungslinien noch in bequemer Weise zu behandeln sind, wohl derjenige mit einer Einzellast am freien Ende den vorliegenden Bedingungen einigermafsen nahekommen, d. h. eine Biegungslinie ergeben, die von der Biegungslinie des schwingenden Stabes in den allgemeinen Verhältnissen nicht zu sehr abweicht. Unter diesen Annahmen möge der Satz vom Arbeitsvermögen auf den Stab angewendet werden.

Sind die Punkte P und Q mit den Geschwindigkeiten u_0 und c durch die Gleichgewichtslage AB gegangen, so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens des Stabes beim Übergange aus der Gleichgewichtslage in die beliebige Lage APQ gleich der Biegungsarbeit desselben, d. h.

$$4)\qquad \frac{\gamma}{g} F \int_0^a \frac{u^2 - u_0^{\,2}}{2} dx = \mathfrak{A} .$$

Einer Einzellast K entspricht aber (2. Theil, S. 110 u. 111) eine Durchbiegung

$$z = \frac{K \cdot a^3}{3\,EJ}$$

und eine innere Arbeit

$$5)\qquad \mathfrak{A} = -\frac{K}{2} z = -\frac{3}{2} \frac{E \cdot J \cdot z^2}{a^3}, \quad \text{weil} \quad K = \frac{3\,E \cdot J \cdot z}{a^3} .$$

Wegen Gl. 2 und 5 wird aber aus Gl. 4:

$$\frac{\gamma}{g} F \frac{v^2 - c^2}{2\,z^2} \int_0^a \eta^2 dx = -\frac{3}{2} \frac{E \cdot J \cdot z^2}{a^3} .$$

Nach 2. Theil, S. 42 ist die Gleichung der Biegungslinie für eine Last K:

$$\eta = \frac{K}{EJ} \left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{3\,z}{2\,a^3} \left(a x^2 - \frac{x^3}{3} \right), \quad \text{somit}$$

$$6)\qquad \int_0^a \eta^2 dx = \frac{9}{4} \frac{z^2}{a^6} \int_0^a \left(a^2 x^4 - \frac{2}{3} a \cdot x^5 + \frac{x^6}{9} \right) dx = 0{,}236\, z^2 a .$$

Hierau𝔰 folgt

$$7)\qquad \frac{\gamma}{g} F \frac{c^2 - v^2}{2 z^2} \cdot 0{,}236\, z^2 a = \frac{3}{2} \frac{E \cdot J \cdot z^2}{a^3} \quad \text{und}$$

$$v^2 = c^2 - 12{,}71 \frac{E \cdot J \cdot g}{a^4 \gamma \cdot F} z^2 .$$

Dies entspricht nach S. 54 mit

$$8)\qquad k^2 = 12{,}71 \frac{E \cdot J \cdot g}{a^4 \gamma \cdot F}$$

der Geschwindigkeitsgleichung einer geradlinigen Schwingung des Stabendes Q. Mithin ist die Schwingungslänge nach S. 58

$$9)\qquad l = \frac{g}{k^2} = \frac{a^4 \gamma \cdot F}{12{,}71 E \cdot J} = 0{,}63 f, \quad \text{wenn}$$

$$f = \frac{\gamma \cdot F \cdot a^4}{8 E \cdot J}$$

die Durchbiegung unter dem eigenen Gewichte des Stabes bedeutet. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist nach S. 58

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \cdot a^2 \sqrt{\frac{\gamma \cdot F}{12{,}71 E \cdot J \cdot g}} = a^2 \sqrt{\frac{0{,}777\, \gamma \cdot F}{E \cdot J \cdot g}},$$

oder mit $J = F \cdot i^2$:

$$10)\qquad t_1 = \frac{a^2}{i} \sqrt{\frac{0{,}777\, \gamma}{E \cdot g}} .$$

Für einen eingespannten Stahlstab rechteckigen Querschnittes von $a = 0{,}1\,\mathrm{m}$ freier Länge und $h = 0{,}001\,\mathrm{m}$ Dicke sei $\gamma = 7800$, $E = 2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg/qm}$, dann wird wegen $i^2 = {}^1/_{12} h^2$ und $i = 0{,}289\, h$

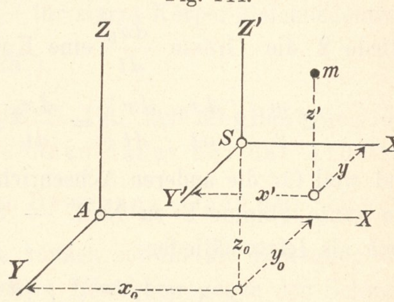
$$t_1 = \frac{0{,}01}{0{,}289 \cdot 0{,}001} \sqrt{\frac{0{,}777 \cdot 7800}{2 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81}} = 0{,}0061 \text{ Sekunden},$$

entsprechend 164 einfachen Schwingungen in der Sekunde.

4. Zerlegung des Arbeitsvermögens einer beliebigen Massengruppe.

Hat ein Massenpunkt m (Fig. 144) in Bezug auf ein festes Achsenkreuz AX, AY, AZ, die Koordinaten x, y, z und der Schwerpunkt S der ganzen Massengruppe die Koordinaten x_0, y_0, z_0, so denke man sich durch S ein Achsenkreuz SX', SY', SZ' gelegt, welches zu dem festen Achsenkreuze stets parallel bleibt, sich also mit dem Schwerpunkt S verschiebt.

Fig. 144.



Der Punkt m habe in Bezug auf das bewegliche Achsenkreuz die