

c) Der Schwerpunkt als Mittelpunkt einer Massengruppe.

Der den Bedingungen

$$Mx_0 = \sum mx, \quad My_0 = \sum my, \quad Mz_0 = \sum mz$$

entsprechende Punkt S mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 , welcher im 1. Theile, S. 139 als Massenmittelpunkt bezeichnet wurde, lässt sich noch in anderer Weise als Mittelpunkt einer Massengruppe erklären, insofern er derjenige Punkt ist, welcher von der Gesamtheit der Massengruppe den kleinsten Abstand hat (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate verstanden). Denn es lässt sich der Satz beweisen:

In einer Massengruppe wird die Summe der Produkte, die durch Multiplikation eines jeden Massenpunktes m mit dem Quadrate des Abstandes von einem bestimmten Punkt entstehen, ein Minimum, wenn dieser bestimmte Punkt der Schwerpunkt der Massengruppe ist.

Hat ein beliebig in der Massengruppe gewählter Festpunkt B (Fig. 139) die Koordinaten x_1, y_1, z_1 , der Schwerpunkt S die Koordinaten x_0, y_0, z_0 , ein Massenpunkt m die Koordinaten x, y, z , so gilt für den Abstand s des Punktes m von B :

$$s^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Bezeichnet man die fragliche Produktensumme in Bezug auf den Punkt B mit W , so ist

$$W = \sum m \{ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \};$$

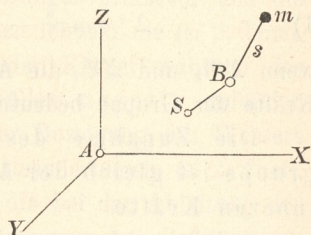
dieselbe wird in Bezug auf den Schwerpunkt S :

$$W_0 = \sum m \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \}.$$

Der Unterschied beider Summen beträgt:

$$W - W_0 = \sum m \{ (x - x_1)^2 - (x - x_0)^2 + (y - y_1)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_1)^2 - (z - z_0)^2 \}.$$

Fig. 139.



Führt man die Quadrate aus, bedenkt, dass x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 konstant, dass $\sum m x = M x_0$ u. s. w. geschrieben werden kann, so ergibt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$\begin{aligned} W - W_0 &= M(x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2) \\ &\quad + M(y_1^2 - 2y_1y_0 + y_0^2) \\ &\quad + M(z_1^2 - 2z_1z_0 + z_0^2) \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$W - W_0 = M\{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2\}.$$

Nennt man aber e den Abstand der beiden Punkte B und S , so ist

$$e^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2, \quad \text{daher}$$

$$W - W_0 = M e^2.$$

Da dies wegen des Quadrates ≥ 0 , so ist stets $W \geq W_0$ und erreicht seinen kleinsten Werth Null für $e = 0$, d. h. wenn B mit S zusammenfällt.

3. Der Satz des Arbeitsvermögens.

Ist c die Anfangs-, v die Endgeschwindigkeit eines Massenpunktes m einer Massengruppe, so ist nach 1. Theil, S. 143

$$1) \quad \sum^{1/2} m v^2 - \sum^{1/2} m c^2 = \sum \mathfrak{A}_k + \sum \mathfrak{A}_i,$$

wenn $\sum \mathfrak{A}_k$ und $\sum \mathfrak{A}_i$ die Arbeitssumme der äusseren bzw. inneren Kräfte der Gruppe bedeuten, oder:

Die Zunahme des Arbeitsvermögens einer Massengruppe ist gleich der Arbeitssumme der äusseren und der inneren Kräfte.

Befinden sich unter den äusseren oder inneren Kräften sog. Bedingungskräfte (s. S. 153), deren Wirkung sich durch gewisse geometrische Bedingungsgleichungen für die Bewegung der Massengruppe ausdrücken lässt, so verrichten diese bei jeder virtuellen Verrückung, mithin auch bei der wirklichen Bewegung nach S. 154 eine Arbeit gleich Null, können also bei der Aufstellung der Arbeitssumme unberücksichtigt bleiben. Dahin gehören nach S. 155 und 1. Theil, S. 144 die inneren Kräfte starrer Körper, ebenso auch nach 2. Theil, S. 231 die inneren Kräfte tropfbar flüssiger Körper, für welche die Bedingung unveränderlichen Rauminhalts besteht und bei der Bewegung durch ein Gefäss noch die Bedingung, dass