

demselben Verhältnisse. Sonach muss die Höhe des Schwerpunktes des Körpers des Halbellipsoides von der Höhe c betragen

$$6) \quad \quad \quad \frac{3}{8} c,$$

wie es für den Halbkugelkörper vom Halbmesser c im 1. Theile, S. 136 gefunden wurde.

2. Anwendungen des Satzes von der Bewegung des Schwerpunktes und des Satzes vom Antriebe.

a) Gerader, centraler Stofs.

Wenn zwei Körper von den Massen M_1 und M_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in geradem centralen Stosse zusammen treffen (mit $c_1 > c_2$), so ist, wenn man beide Körper als eine einzige Massengruppe betrachtet, die während der Stossdauer zwischen beiden Massen auftretende Druckkraft N eine innere Kraft. Es wirkt daher auf die Massengruppe, wenn man die Schwere und die Reibung ausser Acht lässt, auf die Massengruppe keine äussere Kraft, daher ist die Geschwindigkeit u des Schwerpunktes S der Gruppe beider Körper gleichbleibend; es gilt nämlich nach Gl. 4, S. 171

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = (M_1 + M_2) u, \quad \text{d. h.}$$

$$7) \quad \quad \quad u = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

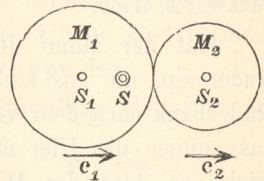
Dies ist zugleich die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der Schwerpunkte beider Körper im Augenblicke der stärksten Formänderung (s. 2. Theil, S. 128, Gl. 5). Bewegen sich die Massen nach dem Stosse mit verschiedenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 weiter, so ist, da die gesammte Bewegungsgrösse gleich bleibt,

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2, \quad \text{woraus}$$

$$\frac{c_1 - v_1}{v_2 - c_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

wird (s. 2. Theil, S. 127, Gl. 4); die Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes aber bleibt unverändert u (nach Gl. 7), so lange keine äussere Kraft auftritt.

Fig. 138.



b) Verhalten eines auf dem Wasser schwimmenden Kahnes.

Befindet sich in einem Kahn ein Mensch und haben beide die Geschwindigkeit Null, so hat auch der Gesamtschwerpunkt von Kahn und Mensch die Geschwindigkeit Null und wird, wenn keine äusseren Kräfte in wagerechter Richtung auftreten, auch keine wagerechte Bewegung erfahren. Bewegt sich der Mensch in dem Kahne nach vorn, so wird der Kahn unter ihm zurückgehen, u. zw. wenn man den Bewegungswiderstand des Kahnes vernachlässigt, um genau so viel, dass der Gesamtschwerpunkt an derselben Stelle verbleibt. Die Ursache dieses Verhaltens besteht darin, dass der Mensch beim Vorwärtsschreiten einer Kraft bedurfte, die zwischen seinen Füßen und dem Boden des Kahnes auftrat, den Schreitenden vorwärts, den Kahn aber, nach dem Gesetze der Wechselwirkung, rückwärts trieb.

Hat der Mann den Kahn ans Ufer gerudert und zieht die Ruder ein, um ans Land zu steigen, so wird er, wenn er von der Ruderbank nach dem Vorderende des Kahnes gelangt ist, bemerken, dass dieser das Ufer nun nicht mehr berührt. Ist der Kahn sehr leicht, so wird der Mann nun vielleicht den Uferrand nicht mehr ergreifen können. Befinden sich in der Mitte des Kahnes zwei Menschen, so lässt sich dieses Zurückweichen vom Ufer dadurch vermeiden, dass, während der Eine nach dem Vorderende ging, der Andere nach dem Hinterende schreitet. Dann heben sich die Wirkungen an dem Kahne gegenseitig auf. Der Erstere kann sich am Lande festhalten, und nun darf auch der Gefährte nach vorn schreiten, ohne den Kahn zurückzutreiben, da die Hand des Ersteren jetzt eine Kraft ausübt, die den Gefährten und somit auch den Gesamtschwerpunkt nach dem Ufer hinzieht.

Befinden sich in dem Kahne Steine oder dergl., so kann man durch Fortwerfen derselben nach rückwärts den Kahn vorwärts treiben; denn zum Fortschleudern eines Steines ist eine wagerechte Kraft erforderlich, die sich nach dem Gesetze der Wechselwirkung durch den Körper des Werfenden auf den Kahn überträgt und diesen in entgegengesetztem Sinne fortreibt. Auch durch Abfeuern von Gewehren nach rückwärts wird man einen Kahn vorwärts bewegen können.

c) Der Schwerpunkt als Mittelpunkt einer Massengruppe.

Der den Bedingungen

$$Mx_0 = \Sigma mx, \quad My_0 = \Sigma my, \quad Mz_0 = \Sigma mz$$

entsprechende Punkt S mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 , welcher im 1. Theile, S. 139 als Massenmittelpunkt bezeichnet wurde, lässt sich noch in anderer Weise als Mittelpunkt einer Massengruppe erklären, insofern er derjenige Punkt ist, welcher von der Gesamtheit der Massengruppe den kleinsten Abstand hat (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate verstanden). Denn es lässt sich der Satz beweisen:

In einer Massengruppe wird die Summe der Produkte, die durch Multiplikation eines jeden Massenpunktes m mit dem Quadrate des Abstandes von einem bestimmten Punkt entstehen, ein Minimum, wenn dieser bestimmte Punkt der Schwerpunkt der Massengruppe ist.

Hat ein beliebig in der Massengruppe gewählter Festpunkt B (Fig. 139) die Koordinaten x_1, y_1, z_1 , der Schwerpunkt S die Koordinaten x_0, y_0, z_0 , ein Massenpunkt m die Koordinaten x, y, z , so gilt für den Abstand s des Punktes m von B :

$$s^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Bezeichnet man die fragliche Produktensumme in Bezug auf den Punkt B mit W , so ist

$$W = \Sigma m \{ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \};$$

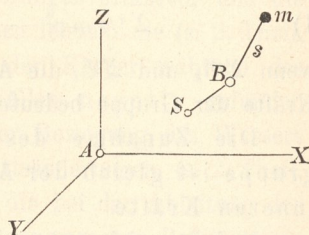
dieselbe wird in Bezug auf den Schwerpunkt S :

$$W_0 = \Sigma m \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \}.$$

Der Unterschied beider Summen beträgt:

$$W - W_0 = \Sigma m \{ (x - x_1)^2 - (x - x_0)^2 + (y - y_1)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_1)^2 - (z - z_0)^2 \}.$$

Fig. 139.



Führt man die Quadrate aus, bedenkt, das x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 konstant, dass $\sum m x = M x_0$ u. s. w. geschrieben werden kann, so ergibt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$\begin{aligned} W - W_0 &= M(x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2) \\ &\quad + M(y_1^2 - 2y_1y_0 + y_0^2) \\ &\quad + M(z_1^2 - 2z_1z_0 + z_0^2) \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$W - W_0 = M\{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2\}.$$

Nennt man aber e den Abstand der beiden Punkte B und S , so ist

$$e^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2, \quad \text{daher}$$

$$W - W_0 = M e^2.$$

Da dies wegen des Quadrates ≥ 0 , so ist stets $W \geq W_0$ und erreicht seinen kleinsten Werth Null für $e = 0$, d. h. wenn B mit S zusammenfällt.

3. Der Satz des Arbeitsvermögens.

Ist c die Anfangs-, v die Endgeschwindigkeit eines Massenpunktes m einer Massengruppe, so ist nach 1. Theil, S. 143

$$1) \quad \sum^{1/2} m v^2 - \sum^{1/2} m c^2 = \sum \mathfrak{A}_k + \sum \mathfrak{A}_i,$$

wenn $\sum \mathfrak{A}_k$ und $\sum \mathfrak{A}_i$ die Arbeitssumme der äusseren bzw. inneren Kräfte der Gruppe bedeuten, oder:

Die Zunahme des Arbeitsvermögens einer Massengruppe ist gleich der Arbeitssumme der äusseren und der inneren Kräfte.

Befinden sich unter den äusseren oder inneren Kräften sog. Bedingungskräfte (s. S. 153), deren Wirkung sich durch gewisse geometrische Bedingungsgleichungen für die Bewegung der Massengruppe ausdrücken lässt, so verrichten diese bei jeder virtuellen Verrückung, mithin auch bei der wirklichen Bewegung nach S. 154 eine Arbeit gleich Null, können also bei der Aufstellung der Arbeitssumme unberücksichtigt bleiben. Dahin gehören nach S. 155 und 1. Theil, S. 144 die inneren Kräfte starrer Körper, ebenso auch nach 2. Theil, S. 231 die inneren Kräfte tropfbar flüssiger Körper, für welche die Bedingung unveränderlichen Rauminhalts besteht und bei der Bewegung durch ein Gefäss noch die Bedingung, dass