auf Pauspapier zeichnet oder aus starkem Kartenpapier so ausschneidet (Fig. 136), dass man D und S auf DD_1 bezw. SS_1 verschiedene Lagen geben und bei B jedesmal einen Zirkelstich machen kann.

B. Bewegung einer Massengruppe.

I. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes; Satz vom Antriebe.

Schon im 1. Theil, S. 141 wurden die Gleichungen abgeleitet:

$$1)\qquad \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Darin bedeuteten x, y und z die augenblicklichen Koordinaten eines Massenpunktes m,

$$X = \Sigma K \cos\alpha, \quad Y = \Sigma K \cos\beta, \quad Z = \Sigma K \cos\gamma$$

die Summe der in den einzelnen Achsenrichtungen auftretenden Seitenkräfte der **äusseren** Kräfte K. Daraus folgten nach der Lehre vom Schwerpunkte die Gleichungen

$$2)\qquad \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{X}{M}; \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{Y}{M}; \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{Z}{M},$$

worin x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes der Massengruppe bezeichnen, deren Gesammtmasse M ist. Diese Gleichungen 2 enthielten den Satz:

Der Schwerpunkt einer Massengruppe bewegt sich so, als ob die ganze Masse der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämmtliche äussere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte der Massengruppe haben auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss.

Sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so kann der Schwerpunkt der Massengruppe sich nur geradlinig und gleichförmig bewegen.

Die erste der Gleichungen 1 kann man auch schreiben

$$\Sigma m \cdot \frac{\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\delta t} = X,$$

oder wenn v die Geschwindigkeit eines Punktes, v_x die Seitengeschwindigkeit desselben in der x-Richtung bezeichnet,

$$\frac{\delta \Sigma m v_x}{\delta t} = X.$$

Ist $v = c$ und $v_x = c_x$ für $t = 0$, so ergiebt die Integration vorstehender Gleichung

3) $$\Sigma m v_x - \Sigma m c_x = \int_0^t X \cdot dt.$$

Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit $= mv$ nennt man die **Bewegungsgrösse** der Masse, mv_x die Bewegungsgrösse in der x-Richtung. Das Produkt aus einer Kraft und der Zeit ihrer Einwirkung $= Kt$ heisst der **Antrieb der Kraft**; für veränderliche Kräfte ist der Antrieb also allgemein $\int K \cdot dt$; es ist $\int_0^t X \cdot dt$ der Antrieb der in der x-Richtung wirkenden äusseren Kräfte.

Gl. 3 stellt den **Satz vom Antrieb und der Bewegungsgrösse**, dar; er lautet in Worten:

In einer bestimmten Achsenrichtung ist während irgend eines Zeitraumes die Zunahme der Bewegungsgrösse einer Massengruppe gleich dem Antriebe der in dieser Richtung wirkenden äusseren Kräfte.

Ist in einer Achsenrichtung die Summe der äusseren Kräfte Null, d. h. $X = \Sigma K \cos\alpha = 0$, so erfährt in dieser Achsenrichtung die gesammte Bewegungsgrösse der Massengruppe keine Änderung.

Wegen $\Sigma m x = M x_0$ ist

4) $$\Sigma m v_x = M \cdot \frac{dx_0}{dt};$$

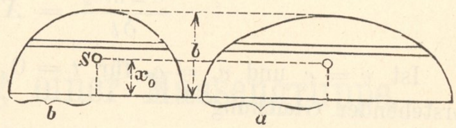
d. h. in einer bestimmten Achsenrichtung ist die Bewegungsgrösse der ganzen Massengruppe gleich der ganzen Masse mal der Geschwindigkeit des Schwerpunktes; ändert sich also in einer Achsenrichtung die Bewegungsgrösse nicht, so behält der Schwerpunkt die gleiche Geschwindigkeit bei.

Ergänzende Bemerkung zu den Schwerpunktsbestimmungen im 1. Theile, S. 132 und 136.

Der Abstand des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche von dem Durchmesser wurde im 1. Theile, S. 132 gefunden zu

$$x_0 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi},$$

Fig. 137.



oder, wenn der Halbmesser b genannt wird,

$$x_0 = \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}.$$

Die Halbellipse von dem Durchmesser $2a$ und der Höhe b (Fig. 137) kann man sich in der Weise aus dem Halbkreis entstanden denken, dass jeder zu dem begrenzenden Durchmesser parallele Flächenstreifen in dem Verhältnis $a : b$ verlängert ist. In Folge dieser Verlängerung ändert sich das statische Moment des Flächenstreifens in demselben Verhältnis $a : b$. Da nun das statische Moment = Fläche mal Schwerpunkts-Ordinate, so bleibt letztere unverändert, wenn das statische Moment und der Flächeninhalt sich in gleichem Verhältnis ändern. Man kann daher ohne Rechnung schliessen, dass der Schwerpunkt der Fläche einer Halbellipse von der Höhe b in dem Abstande

5) $$\frac{4}{3} \frac{b}{\pi}$$

von dem begrenzenden Durchmesser $2a$ liegen muss.

Eine ähnliche Beziehung besteht zwischen dem Schwerpunkt eines Halbkugelkörpers und des Körpers eines Halbellipsoides. Vergrössert man, von einem Halbmesser c ausgehend, sämmtliche Längen in der x-Richtung in dem Verhältnis $a : c$, sämmtliche Längen in der y-Richtung in dem Verhältnis $b : c$, so entsteht ein Halbellipsoid, dessen Grundfläche eine Ellipse der Halbachsen a und b, dessen Höhe $= c$ ist. Jede zur Grundfläche parallele Scheibe hat sich auf das $\frac{ab}{c^2}$ fache vergrössert, das statische Moment jeder Scheibe in Bezug auf die Grundfläche also in demselben Verhältnisse. Sonach muss die Höhe des Schwerpunktes des Körpers des Halbellipsoides von der Höhe c betragen

6) $$\tfrac{3}{8}\,c\,,$$

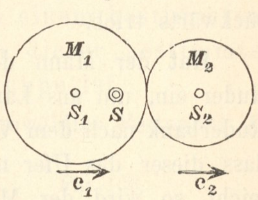
wie es für den Halbkugelkörper vom Halbmesser c im 1. Theile, S. 136 gefunden wurde.

2. Anwendungen des Satzes von der Bewegung des Schwerpunktes und des Satzes vom Antriebe.

a) Gerader, centraler Stofs.

Wenn zwei Körper von den Massen M_1 und M_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in geradem centralen Stosse zusammentreffen (mit $c_1 > c_2$), so ist, wenn man beide Körper als eine einzige Massengruppe betrachtet, die während der Stossdauer zwischen beiden Massen auftretende Druckkraft N eine innere Kraft. Es wirkt daher auf die Massengruppe, wenn man die Schwere und die Reibung ausser Acht lässt, auf die Massengruppe keine äussere Kraft, daher ist die Geschwindigkeit u des Schwerpunktes S der Gruppe beider Körper gleichbleibend; es gilt nämlich nach Gl. 4, S. 171

Fig. 138.



$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = (M_1 + M_2)\,u\,, \quad \text{d. h.}$$

7) $$u = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}\,.$$

Dies ist zugleich die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der Schwerpunkte beider Körper im Augenblicke der stärksten Formänderung (s. 2. Theil, S. 128, Gl. 5). Bewegen sich die Massen nach dem Stosse mit verschiedenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 weiter, so ist, da die gesammte Bewegungsgrösse gleich bleibt,

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2\,, \quad \text{woraus}$$

$$\frac{c_1 - v_1}{v_2 - c_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

wird (s. 2. Theil, S. 127, Gl. 4); die Geschwindigkeit des Gesammtschwerpunktes aber bleibt unverändert u (nach Gl. 7), so lange keine äussere Kraft auftritt.