Es ist zu beweisen, dass $z_0 > z_1$, oder $z_0^2 > z_1^2$; zu dem Ende setzen wir $z_0^2 - z_1^2 = U$ und untersuchen, ob $U > 0$ ist. Es wird

$$U = \frac{1}{4}\left\{y_1^2 - \frac{2\,y_1 r\cdot x_1}{s} + \frac{r^2\cdot x_1^2}{s^2} - s^2 + x_1^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x_1^2\left(\frac{r^2+s^2}{s^2}\right) - \frac{2\,y_1 r\cdot x_1}{s} + y_1^2 - s^2\right\}.$$

Nach den Gl. 1 und 2 findet man leicht

$$r^2 + s^2 = y_1^2;\quad y_1^2 - s^2 = r^2,\quad \text{so dass}$$

$$U = \frac{1}{4}\left\{\frac{x_1^2\cdot y_1^2}{s^2} - \frac{2\,x_1 y_1 r}{s} + r^2\right\};$$

da dies ein Quadrat ist, nämlich

$$U = \left(\frac{1}{2}\left[\frac{x_1 y_1}{s} - r\right]\right)^2,$$

so ist $U > 0$, also bewiesen, dass $z_0 > z_1$, dass also beim Geradestrecken der Schwerpunkt sich wirklich gehoben hat.

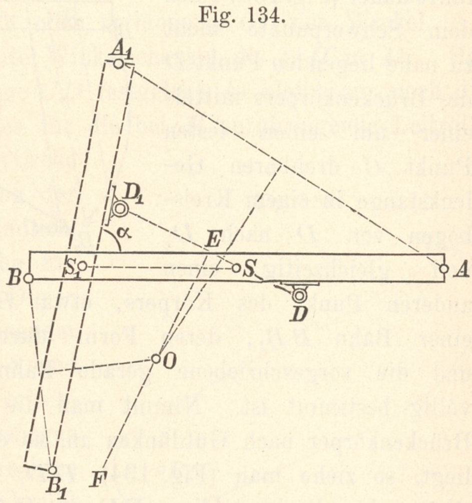
e) Klappbrücken.

Soll ein Getriebe, an welchem als unbedingte Kräfte nur Schwerkräfte wirken, in j e d e r Lage im Gleichgewichte sein, so dass bei einer langsamen Bewegung nur Reibungswiderstände überwunden zu werden brauchen, so muss für jede Lage

$$dz_0 = 0$$

sein, d. h. es muss die Ordinate z_0 des Schwerpunktes der gesammten Massengruppe stets denselben Werth behalten. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Gesammtschwerpunkt sich bei einer virtuellen Verrückung entweder gar nicht bewegt, oder doch stets in d e r s e l b e n w a g e r e c h t e n E b e n e verbleibt.

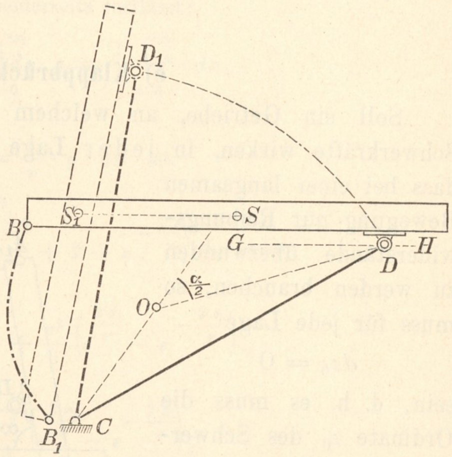
Fig. 134.



Derartige Erwägungen finden Anwendung beim Entwerfen grösserer Klappbrücken. Soll etwa (Fig. 134) der Brückenkörper

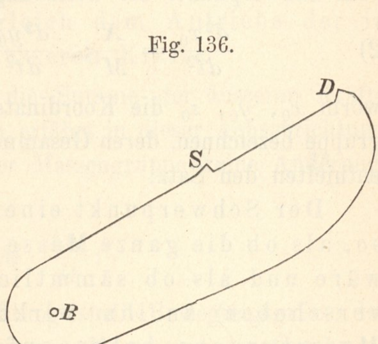
AB in die Lage $A_1 B_1$ gebracht werden, so ist dies nach S. 13 am einfachsten durch Drehung um den Punkt O zu erreichen, den man findet, indem man $\overline{AA_1}$ zieht und in der Mitte derselben eine Winkelrechte errichtet, ebenso B mit B_1 verbindet und in der Mitte von BB_1 eine Normale zu BB_1 zeichnet; dann ist O der Schnittpunkt der beiden Normalen. Bei einer Drehung um O würde aber jeder Punkt, also auch der Schwerpunkt S des Brückenkörpers einen Kreisbogen beschreiben, so dass hierdurch die gestellte Bedingung nicht erfüllt wird. Soll die Bewegung nun so geregelt werden, dass der Schwerpunkt eine Wagerechte beschreibt, so könnte man zunächst auf den Gedanken kommen, den Schwerpunkt unmittelbar längs einer Gleitbahn SS_1 zu führen. Diese Lösung ist aber nicht brauchbar, weil der rechts von der aufgerichteten Klappe befindliche Raum von festen Theilen grösstentheils frei bleiben soll, um Schiffen die Durchfahrt zu gestatten. Man führt daher (Fig. 135) einen dem Schwerpunkte nicht zu nahe liegenden Punkt D des Brückenkörpers mittels einer um einen festen Punkt C drehbaren Gelenkstange in einem Kreisbogen von D nach D_1 und gleichzeitig einen anderen Punkt des Körpers, etwa B, mittels einer Rolle in einer Bahn BB_1, deren Form durch den Kreisbogen DD_1 und die vorgeschriebene gerade Bahn SS_1 des Schwerpunktes völlig bestimmt ist. Nimmt man die Lage des Punktes D am Brückenkörper nach Gutdünken an, so dass dadurch auch D_1 festliegt, so ziehe man (Fig. 134) DD_1 und in der Mitte E von DD_1 eine Rechtwinklige EF zu DD_1. Dann muss der feste Drehpunkt C der Gelenkstange DC jedenfalls auf EF liegen. Da bei einer Drehung des Brückenkörpers um O (Fig. 134) D auch nach D_1 gelangen würde, so muss die Gerade EF auch den

Fig. 135.



Punkte O enthalten. Auf EF kann der Drehpunkt C beliebig gewählt werden. Da aber die Gelenkstange CD in dem geöffneten Zustande der Brücke eine Lage CD_1 (Fig. 135) haben muss, welche den Raum für die freie Durchfahrt nicht beengt, da es ferner für die feste Lagerung des Drehpunktes C erwünscht sein wird, denselben etwa in gleicher Tiefe mit B_1 anzuordnen, so wird die Gerade EF (Fig. 134) vielleicht einen zweckmässig liegenden Drehpunkt C nicht enthalten, so dass also die willkürliche Annahme des Punktes D nicht glücklich war. Man kann dann auch umgekehrt den Drehpunkt C an passend erscheinender Stelle annehmen, für den Angriffspunkt D der Gelenkstange aber vielleicht nur eine gewisse Tiefe, d. h. einen gewissen Abstand von der Brückentafel, gegeben durch eine Gerade GH (Fig. 135), festsetzen und nun die Lage des Angriffspunktes D in der Geraden GH durch Zeichnung in folgender Weise finden. Eine Gerade CO bestimmt diejenige Linie, welche in Fig. 134 EF genannt wurde. Ist nun α der gesammte Winkel, um den die Brückentafel gedreht werden soll, so ist α zugleich der gemeinschaftliche Centriwinkel aller Kreisbögen, die bei einer Drehung um O von sämmtlichen Theilen der Brückenbahn, also auch von D, beschrieben werden würden. Trägt man im Punkte O an die nach oben verlängerte CO den Winkel $1/2\,\alpha$ an, so schneidet der zweite Winkelschenkel die GH in D. Hat man somit die Gelenkstange CD festgelegt, so bleibt nur noch die Form des Führungsschlitzes für die bei B anzubringende Leitrolle zu bestimmen. Eine analytische Entwickelung der Gleichung der Bahnlinie BB_1 ist so umständlich, dass man die zeichnerische Ermittelung vorziehen wird. Die in der Brückentafel gegen einander fest liegenden Punkte D, S und B (Fig. 135) bilden ein Dreieck; lässt man D auf dem Kreisbogen DD_1, S auf der Wagerechten SS_1 sich bewegen, so beschreibt B die Bahnlinie BB_1 der Führungsrolle. Man bestimmt daher die Punkte der Kurve BB_1 am bequemsten und sichersten, indem man das Dreieck DSB

Fig. 136.



auf Pauspapier zeichnet oder aus starkem Kartenpapier so ausschneidet (Fig. 136), dass man D und S auf DD_1 bezw. SS_1 verschiedene Lagen geben und bei B jedesmal einen Zirkelstich machen kann.

B. Bewegung einer Massengruppe.

I. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes; Satz vom Antriebe.

Schon im 1. Theil, S. 141 wurden die Gleichungen abgeleitet:

1) $$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Darin bedeuteten x, y und z die augenblicklichen Koordinaten eines Massenpunktes m,

$$X = \Sigma K \cos \alpha, \quad Y = \Sigma K \cos \beta, \quad Z = \Sigma K \cos \gamma$$

die Summe der in den einzelnen Achsenrichtungen auftretenden Seitenkräfte der äusseren Kräfte K. Daraus folgten nach der Lehre vom Schwerpunkte die Gleichungen

2) $$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{X}{M}; \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{Y}{M}; \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{Z}{M},$$

worin x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes der Massengruppe bezeichnen, deren Gesammtmasse M ist. Diese Gleichungen 2 enthielten den Satz:

Der Schwerpunkt einer Massengruppe bewegt sich so, als ob die ganze Masse der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämmtliche äussere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte der Massengruppe haben auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss.

Sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so kann der Schwerpunkt der Massengruppe sich nur geradlinig und gleichförmig bewegen.