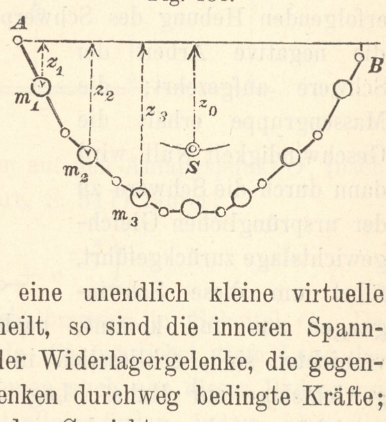
dass die virtuelle Arbeit Null ist, schliesst nur beschleunigte, nicht aber gleichförmige Drehbewegungen aus. Eine gleichförmige Drehung hat auf die Beziehung zwischen den unbedingten Kräften keinen Einfluss, wenn man von der Reibung absieht. Durch eine solche Drehung werden in den umlaufenden Theilen besondere, von der Winkelgeschwindigkeit abhängende Spannungen (s. 2. Theil, S. 93) hervorgerufen; im Allgemeinen werden auch die Widerstände der festen Achsen dadurch beeinflusst; doch fällt der letztere Einfluss fort, wenn die Drehachsen freie Achsen sind (s. 1. Theil, S. 289). Die durch die Umlaufgeschwindigkeit erzeugten inneren Spannungen sind in sehr vielen Fällen, z. B. bei den durch Muskelkraft bewegten Aufzugsmaschinen, im Vergleiche mit den bei der Geschwindigkeit Null auftretenden Spannungen verschwindend klein; daher man auf den Unterschied zwischen gleichförmiger Drehbewegung und Ruhezustand meist gar keine Rücksicht nimmt. Bei Körpern mit grosser Umlaufgeschwindigkeit, z. B. Schwungrädern, Mühlsteinen (s. 2. Theil, S. 96), Schleudermaschinen (s. 2. Theil, S. 201) haben diese Spannungen aber mafsgebende Bedeutung.

d) Gelenkstangen-Verbindungen.

A und B (Fig. 131) seien die Aufhängegelenke einer Gelenkstangen-Verbindung. Die einzelnen Stäbe seien starr und durch reibungslose Gelenke mit einander verbunden. Das Gewicht jedes Stabes sei zu einem Massenpunkt m vereinigt gedacht. Diese Massen m_1, m_2, m_3 ... mögen um z_1, z_2, z_3 ... unter einer festen wagerechten Ebene liegen; es soll eine Beziehung für die Ruhelage der Stangenverbindung gesucht werden.

Fig. 131.



Wird der Stangenverbindung eine unendlich kleine virtuelle Verrückung aus der Ruhelage ertheilt, so sind die inneren Spannkräfte der Stäbe, die Widerstände der Widerlagergelenke, die gegenseitigen Kräfte in den Zwischengelenken durchweg bedingte Kräfte; virtuelle Arbeiten werden nur von den Gewichten $m_1 g$, $m_2 g$ ....

verrichtet. Erfährt nun eine der Massen m bei der unendlich kleinen Verrückung eine Senkung um dz, so ist die entsprechende virtuelle Arbeit $mg \cdot dz$, und es muss, von der Ruhelage aus gerechnet,

$$0 = \Sigma(mg \cdot dz) = g\left\{m_1 \cdot dz_1 + m_2 \cdot dz_2 + \dots\right\} \text{ sein.}$$

Dafür kann man, weil die Massen unveränderlich sind, auch schreiben

$$0 = g \cdot d(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots).$$

Hat der Schwerpunkt S der Massen m in der Ruhelage eine Tiefe z_0 unter der festen wagerechten Ebene, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\Sigma m \cdot z = M \cdot z_0$$

(s. 1. Theil, S. 139), wenn $M = \Sigma m$ die Gesammtmasse bedeutet. Daher wird

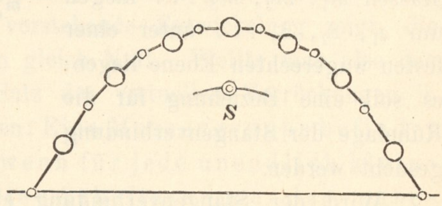
$$0 = d(M \cdot z_0) = M \cdot dz_0 \quad \text{oder} \quad dz_0 = 0$$

die Bedingung für die Ruhelage der Gelenkstangen-Verbindung.

Bei einer unendlich kleinen virtuellen Verrückung darf der Schwerpunkt der gesammten Masse sich weder heben noch senken, d. h. er muss in der Ruhelage entweder möglichst tief oder möglichst hoch liegen.

Befindet sich der Schwerpunkt S in der Ruhelage so tief wie möglich, so wird einer endlichen virtuellen Verrückung eine Bahnlinie des Schwerpunktes entsprechen, wie in Fig. 131 angedeutet. Erfolgt die Verrückung aus der Gleichgewichtslage etwa durch einen leichten seitlichen Stoss, welcher der Massengruppe ein gewisses Arbeitsvermögen ertheilt, so wird dieses bei der nunmehr erfolgenden Hebung des Schwerpunktes aus der tiefsten Lage durch die negative Arbeit der Schwere aufgezehrt; die Massengruppe erhält die Geschwindigkeit Null, wird dann durch die Schwere zu der ursprünglichen Gleichgewichtslage zurückgeführt, führt um diese Schwingungen aus und kommt, nachdem letztere durch Widerstände vernichtet sind, schliesslich in der sicheren (stabilen) Gleichgewichtslage zur Ruhe. Lag der Schwerpunkt aber im Gleichgewichtszustande so hoch wie möglich (Fig. 132), so wird der,

Fig. 132.

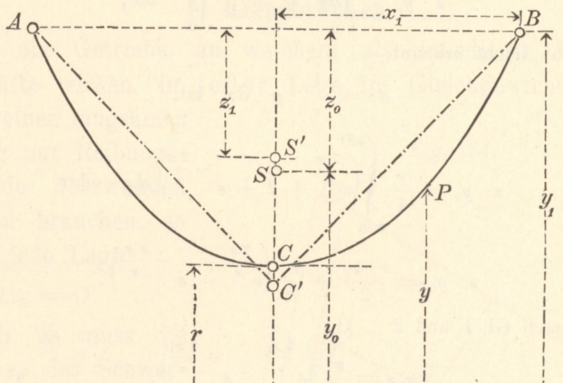


einem kleinen Anstofse folgenden Senkung des Schwerpunktes eine positive Arbeit der Schwere entsprechen, d. h. die Massengruppe wird sich beschleunigt immer weiter aus der ursprünglichen Ruhelage entfernen und erst in einer neuen sicheren Gleichgewichtslage mit tief liegendem Schwerpunkte zur Ruhe gelangen.

Die tiefste Lage des Schwerpunktes entspricht also der natürlichen sicheren Gleichgewichtsform, die höchste Lage der künstlichen, unsicheren (labilen) Gleichgewichtsform. Bei unendlich vielen Stangen geht die erstere Form in die Kettenlinie, die zweite Form in die Drucklinie über (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 315).

Die Gleichgewichtsform einer Kette, die der Bogenlänge nach geichmässig belastet wird, ist die gemeine Kettenlinie

Fig. 133.



(Fig. 133), deren Gleichung, bezogen auf den Anfangspunkt O, (nach Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 317) lautet:

$$1)\qquad y = {}^1\!/_2\, r \left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right).$$

Darin bedeutet r den Krümmungshalbmesser im Scheitel C. Da dem sicheren Gleichgewichtszustande die möglichst tiefe Lage des Schwerpunktes entspricht, so kann man auch aus dieser Bedingung die Gleichung der gemeinen Kettenlinie finden, indem man die

Frage stellt: Nach welcher Kurve muss eine bei A und B befestigte Kette von gegebener Länge geformt sein, damit ihr Schwerpunkt so tief wie möglich liege. Die Lösung dieser Aufgabe mit Hülfe der Variationsrechnung führt thatsächlich auf die Gleichung 1. Diese Behandlung überschreitet den Rahmen unseres Buches; doch möge der Nachweis geführt werden, dass, wenn man die im Gleichgewichte befindliche Kette ACB bei C lothrecht abwärts zieht und dadurch (annähernd) in die geknickte Form $AC'B$ überführt, der Gesammtschwerpunkt sich von S nach S' hebt.

Hat der Aufhängepunkt B die Koordinaten x_1 und y_1, so findet man die Bogenlänge $CB = s$ leicht zu

2) $$s = {}^1\!/_2\, r \left(e^{\frac{x_1}{r}} - e^{-\frac{x_1}{r}}\right).$$

Für die Höhe des Schwerpunktes S der Kettenlinie $ACB = 2s$ über O gilt dann, wenn man den Faktor 2 beiderseits fortlässt:

$$s \cdot y_0 = \int_0^{x_1} ds \cdot y = \frac{1}{r}\int_0^{x_1} y^2 \cdot dx,$$

weil, wie man leicht erkennt,

$$ds = \frac{1}{r} \cdot y \cdot dx \quad \text{ist.}$$

Dann wird $$s \cdot y_0 = \frac{r}{4}\int_0^{x_1}\left(e^{\frac{2x}{r}} + 2 + e^{-\frac{2x}{r}}\right) dx \quad \text{oder}$$

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{r^2}{8}\left(e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}}\right).$$

Weil aber nach Gl. 1 und 2

$$y_1 s = \frac{r^2}{4}\left(e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}}\right),$$

so kann man schreiben

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{y_1 \cdot s}{2}; \quad \text{mithin}$$

$$y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2s} + \frac{y_1}{2},$$

oder für die Tiefe des Schwerpunktes S unter der Sehne AB:

$$z_0 = y_1 - y_0 = \frac{y_1}{2} - \frac{r \cdot x_1}{2s}.$$

Wird die Kette von der Länge $2s$, aber in die Form $AC'B$ gebracht, so ist $AC' = s$ und die Tiefe des Schwerpunktes unter AB

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - x_1^2}.$$

Es ist zu beweisen, dass $z_0 > z_1$, oder $z_0^2 > z_1^2$; zu dem Ende setzen wir $z_0^2 - z_1^2 = U$ und untersuchen, ob $U > 0$ ist. Es wird

$$U = \frac{1}{4}\left\{y_1^2 - \frac{2\,y_1 r \cdot x_1}{s} + \frac{r^2 \cdot x_1^2}{s^2} - s^2 + x_1^2\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{x_1^2\left(\frac{r^2 + s^2}{s^2}\right) - \frac{2\,y_1 r \cdot x_1}{s} + y_1^2 - s^2\right\}.$$

Nach den Gl. 1 und 2 findet man leicht

$$r^2 + s^2 = y_1^2; \quad y_1^2 - s^2 = r^2, \quad \text{so dass}$$
$$U = \frac{1}{4}\left\{\frac{x_1^2 \cdot y_1^2}{s^2} - \frac{2\,x_1 y_1 r}{s} + r^2\right\};$$

da dies ein Quadrat ist, nämlich

$$U = \left(\frac{1}{2}\left[\frac{x_1 y_1}{s} - r\right]\right)^2,$$

so ist $U > 0$, also bewiesen, dass $z_0 > z_1$, dass also beim Geradestrecken der Schwerpunkt sich wirklich gehoben hat.

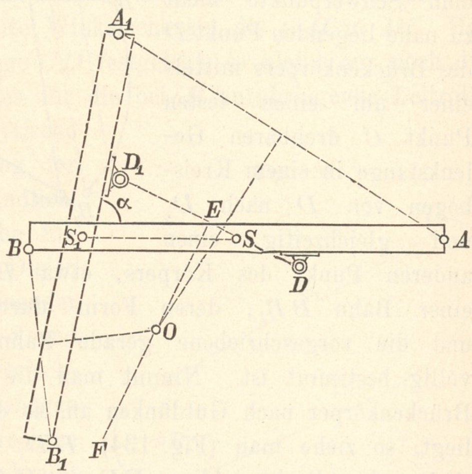
e) Klappbrücken.

Soll ein Getriebe, an welchem als unbedingte Kräfte nur Schwerkräfte wirken, in jeder Lage im Gleichgewichte sein, so dass bei einer langsamen Bewegung nur Reibungswiderstände überwunden zu werden brauchen, so muss für jede Lage

$$dz_0 = 0$$

sein, d. h. es muss die Ordinate z_0 des Schwerpunktes der gesammten Massengruppe stets denselben Werth behalten. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Gesammtschwerpunkt sich bei einer virtuellen Verrückung entweder gar nicht bewegt, oder doch stets in derselben wagerechten Ebene verbleibt.

Fig. 134.



Derartige Erwägungen finden Anwendung beim Entwerfen grösserer Klappbrücken. Soll etwa (Fig. 134) der Brückenkörper