Basel, gest. daselbst 1748) zeigte 1717, dass der allgemeine Satz der willkürlichen Verrückungen zur Lösung aller Aufgaben des Gleichgewichts benutzt werden könne, und Lagrange (geb. 1736 zu Turin, gest. 1813 zu Paris) hat ihn 1788 zu einer der Grundlagen seines Werkes über analytische Mechanik gemacht. Bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts berechnete man die Wirkung von Maschinen noch ohne eingehende Berücksichtigung der Reibung und konnte daher mit der Behandlung einer Maschine als Ganzes nach dem Satze der virtuellen Verrückungen sich begnügen. Die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper wurden von Poinsot (geb. 1774 zu Paris, gest. daselbst 1859) in der jetzt gebräuchlichen Form entwickelt.

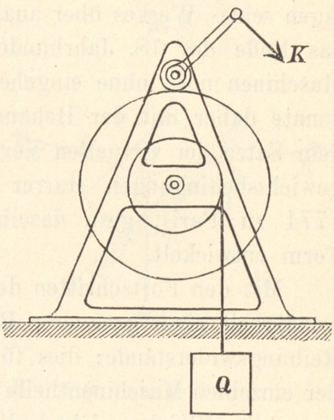
Mit den Fortschritten des Maschinenbaues ergab sich die Nothwendigkeit einer genaueren Berechnung unter Berücksichtigung aller Reibungswiderstände; dies führte zu einer eingehenden Betrachtung der einzelnen Maschinentheile und aller an ihnen auftretenden Kräfte, wozu die Gleichgewichtsbedingungen in der im 1. Theile, S. 146 mitgetheilten Form besser geeignet waren als der Satz der willkürlichen Verrückungen. Erleichtert wurden diese Rechnungen noch durch die Benutzung des Reibungswinkels (s. 1. Theil, S. 190), des Kraftecks und des Seilecks (s. 1. Theil, S. 118). Erneute Anwendung hat nun aber der Satz der virtuellen Verrückungen gefunden für die Berechnung der Fachwerke, u. zw. 1864 durch Clerk Maxwell (geb. 1830, gest. 1879) und im Jahre 1874 durch Mohr in Dresden (s. Keck, Elasticitätslehre, S. 207).

Da die Fachwerke als Verbindungen von Stäben mit reibungslosen Gelenken aufgefasst werden, so sind sie für die Anwendung des Satzes der virtuellen Verrückungen in hervorragender Weise geeignet (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 207, 250, 255).

c) Aufzugsmaschinen.

Bei der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde sind die einzelnen Theile des Triebwerkes derartig mit einander verkuppelt, dass irgend einer Geschwindigkeit v der Kurbel eine dadurch genau bestimmte Geschwindigkeit c der Last Q entspricht. Es ist $v:c$ das durch den geometrischen Zusammenhang bedingte Uebersetzungsverhältnis der Winde. Die Triebkraft K und die Last Q sind die einzigen unbedingten Kräfte, während alle anderen Kräfte, nämlich die inneren Spannungen der Kurbel, des Kurbelarmes und der übrigen Theile des Triebwerks und des Gestelles, die Widerstände der Achsen, die Kräfte zwischen den Zähnen zu den bedingten Kräften gehören. Unter Vernachlässigung der Reibungswiderstände wird dann für ein Zeittheilchen dt

Fig. 130.



$$0 = K \cdot v \cdot dt - Q \cdot c \cdot dt$$

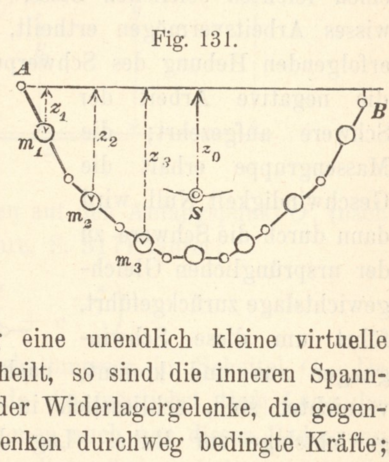
oder $Q : K = v : c$. Hierin liegt der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren" (s. 1. Theil, S. 215). Aus der hier benutzten Weise der Herleitung erkennt man, dass der Satz für alle einfachen Maschinen gelten muss, solange man die Reibungswiderstände vernachlässigt.

Ein Körper, der an einem Punkt oder einer Achse befestigt ist, kann im Gleichgewichtszustande sich nur befinden, indem er ruht; denn die Drehbewegung um den festen Punkt oder die feste Achse, welche die einzig möglichen Bewegungen sind, ertheilen den einzelnen Massenpunkten krummlinige Bewegungen, während das Gleichgewicht eines Massenpunktes durch Ruhe oder geradlinige, gleichförmige Bewegung bedingt ist. Ertheilt man aber der Kurbel der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde eine gleichmässige Drehbewegung, so wird, wie die vorstehende Entwickelung zeigt, die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null. Wollte man also den auf S. 157 ausgesprochenen Satz der virtuellen Verrückungen in der umgekehrten Fassung bringen: Eine Massengruppe befindet sich im Gleichgewichte, wenn für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null ist, so müsste noch hinzugefügt werden: unter der Voraussetzung, dass in der Massengruppe nicht etwa schon Winkelgeschwindigkeiten um feste Achsen oder Punkte bestehen. Denn der Umstand, dass die virtuelle Arbeit Null ist, schliesst nur **beschleunigte**, nicht aber gleichförmige Drehbewegungen aus. Eine gleichförmige Drehung hat auf die Beziehung zwischen den unbedingten Kräften keinen Einfluss, wenn man von der Reibung absieht. Durch eine solche Drehung werden in den umlaufenden Theilen besondere, von der Winkelgeschwindigkeit abhängende Spannungen (s. 2. Theil, S. 93) hervorgerufen; im Allgemeinen werden auch die Widerstände der festen Achsen dadurch beeinflusst; doch fällt der letztere Einfluss fort, wenn die Drehachsen **freie** Achsen sind (s. 1. Theil, S. 289). Die durch die Umlaufgeschwindigkeit erzeugten inneren Spannungen sind in sehr vielen Fällen, z. B. bei den durch Muskelkraft bewegten Aufzugsmaschinen, im Vergleiche mit den bei der Geschwindigkeit Null auftretenden Spannungen verschwindend klein; daher man auf den Unterschied zwischen gleichförmiger Drehbewegung und Ruhezustand meist **gar** keine Rücksicht nimmt. Bei Körpern mit grosser Umlaufgeschwindigkeit, z. B. Schwungrädern, Mühlsteinen (s. 2. Theil, S. 96), Schleudermaschinen (s. 2. Theil, S. 201) haben diese Spannungen aber mafsgebende Bedeutung.

d) Gelenkstangen-Verbindungen.

A und B (Fig. 131) seien die Aufhängegelenke einer Gelenkstangen-Verbindung. Die einzelnen Stäbe seien starr und durch reibungslose Gelenke mit einander verbunden. Das Gewicht jedes Stabes sei zu einem Massenpunkt m vereinigt gedacht. Diese Massen m_1, m_2, m_3 ... mögen um z_1, z_2, z_3 ... unter einer festen wagerechten Ebene liegen; es soll eine Beziehung für die Ruhelage der Stangenverbindung gesucht werden.

Fig. 131.



Wird der Stangenverbindung eine unendlich kleine virtuelle Verrückung aus der Ruhelage ertheilt, so sind die inneren Spannkräfte der Stäbe, die Widerstände der Widerlagergelenke, die gegenseitigen Kräfte in den Zwischengelenken durchweg bedingte Kräfte; virtuelle Arbeiten werden nur von den Gewichten $m_1 g$, $m_2 g$ ....