welche als geradlinig und rechtwinklig zu AO und BO angesehen werden können. Ist β der Winkel, den AO mit der Rechtwinkligen OE zu der Last Q bildet, so findet sich der gleiche Winkel β auch zwischen AA_1 und der Last Q, so dass die Projektion von AA_1 auf die Richtung von Q ist

$$AC = AA_1 \cos\beta = AO \cdot d\alpha \cdot \cos\beta = OE \cdot d\alpha.$$

Ebenso wird auf der rechten Seite

$$BD = BB_1 \cdot \cos\gamma = OB \cdot \cos\gamma \cdot d\alpha = OF \cdot d\alpha.$$

Der Widerstand der Drehachse O sowie die inneren Spannungen des als starr angenommenen Hebels sind bedingte Kräfte. Unbedingte Kräfte sind nur die Last Q und die treibende Kraft K; daher gilt nach dem Satze der virtuellen Verrückungen

$$0 = -Q \cdot AC + K \cdot BD, \quad \text{oder}$$

$$K \cdot OF \cdot d\alpha = Q \cdot OE \cdot d\alpha, \quad \text{d. h.}$$

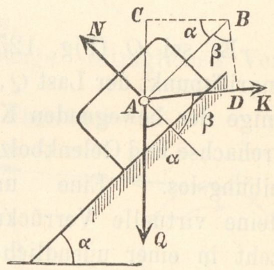
$$K \cdot OF = Q \cdot OE.$$

Dies ist nichts anderes als die Momentengleichung für den Hebel in Bezug auf seine Drehachse (s. 1. Theil, S. 151).

b) Schiefe Ebene.

Soll ein Körper vom Gewichte Q auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α durch eine Kraft K, welche mit der Normalen der Ebene den Winkel β einschliesst, gleichförmig aufwärts gezogen werden (Fig. 126) und soll dabei die Reibung zunächst unberücksichtigt bleiben, so fassen wir eine Gleitbewegung des Körpers längs der Ebene um die Strecke AB als virtuelle Verrückung auf. Dann kann man den Normalwiderstand N als bedingte Kraft ausser Acht lassen. Es ist

Fig. 126.



$\measuredangle ABC = \alpha$; $\measuredangle ABD = \beta$, somit

1) $$0 = -Q \cdot AB \cdot \sin\alpha + K \cdot AB \cdot \sin\beta, \quad \text{oder}$$

2) $$K = Q \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Diese Gleichung gilt auch für gleichförmige Abwärtsbewegung und auch für die Ruhe des Körpers.

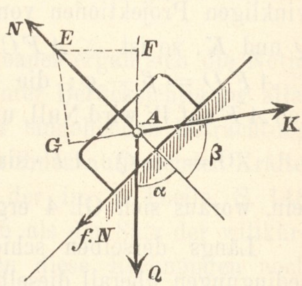
Soll aber die Reibung $f \cdot N$ mit berücksichtigt werden, etwa für die Aufwärtsbewegung, so ergiebt sich zunächst leicht wie Gl. 1:

$$0 = -Q \cdot AB \cdot \sin\alpha + K \cdot AB \cdot \sin\beta - fN \cdot AB, \quad \text{oder}$$

$$K \cdot \sin\beta = Q \cdot \sin\alpha + fN. \tag{3}$$

Nun aber muss man noch N finden, und dies ist mittels einer virtuellen Verrückung, d. h. einer solchen längs der Ebene, nicht möglich; man muss hierzu den allgemeinen Satz der willkürlichen Verrückungen (S. 153) anwenden. Wir ertheilen (Fig. 127) dem Körper eine Parallelverschiebung um die Strecke AE im Sinne von N und behandeln diese nur insofern als eine virtuelle Verrückung in beschränkter Form, indem wir den Körper als eine starre Massengruppe sich parallel verschieben lassen. N gehört nun zu den unbedingten Kräften. Der Verschiebungsweg AE giebt auf den Richtungen von Q, K und $f \cdot N$ die Projektionen: $AE \cdot \cos\alpha$; $AE \cdot \cos\beta$ und Null. Daher wird

Fig. 127.



$$0 = N \cdot AE - Q \cdot AE \cdot \cos\alpha - K \cdot AE \cdot \cos\beta, \quad \text{also}$$

$$N = Q \cdot \cos\alpha + K \cdot \cos\beta.$$

Setzt man dies in Gl. 3 ein, so ergiebt sich

$$K \sin\beta = Q \sin\alpha + fQ \cos\alpha + fK \cos\beta \quad \text{oder}$$

$$K = Q \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\beta - f\cos\beta}.$$

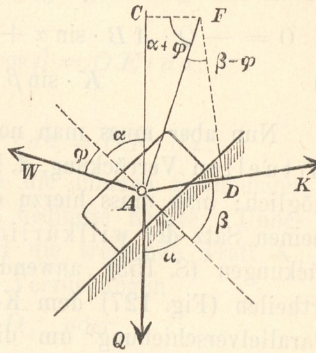
Vertauscht man noch f mit $\operatorname{tg}\varphi$ (φ = Reibungswinkel) und multiplicirt in Zähler und Nenner mit $\cos\varphi$, so lässt sich die letzte Gleichung leicht zusammenziehen in

$$K = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} \tag{4}$$

(vergl. 1. Theil, S. 195, Gl. 6).

Allerdings kann man diese Gleichung auch unmittelbar erhalten, indem man für den zu betrachtenden Sinn der Gleitbewegung (in diesem Fall also nach aufwärts) die Richtung des Gesammtwiderstandes W der schiefen Ebene, d. h. der Mittelkraft aus N und $f \cdot N$, bestimmt, welche von N um den Reibungswinkel φ abweicht, und dem Körper dann eine Verschiebung AF, rechtwinklig zu W ertheilt (Fig. 128). Sind dann AC und AD die rechtwinkligen Projektionen von AF auf Q und K, so ist $\measuredangle AFC = \alpha + \varphi$, $\measuredangle AFD = \beta - \varphi$; die Projektion von AF auf W wird Null, und es muss

Fig. 128.

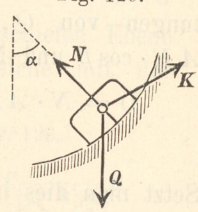


$$0 = -Q \cdot AF \cdot \sin(\alpha + \varphi) + K \cdot \overline{AF} \cdot \sin(\beta - \varphi)$$

sein, woraus sich Gl. 4 ergiebt.

Längs derselben schiefen Ebene bleiben die Gleichgewichtsbedingungen überall dieselben; daher war es in diesem Falle gleichgültig, ob die Verrückung endlich oder unendlich klein gewählt wurde. Sollte aber der Körper auf einer gekrümmten Fläche durch die Kraft K gehalten, oder langsam aufwärts bewegt oder auch langsam hinabgelassen werden (Fig. 129), so würde die Kraft K von dem Winkel α abhängig sein; daher muss man in diesem Fall unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Fig. 129.



Geschichtliches. Aus der Behandlung des Körpers auf schiefer Ebene ist leicht zu erkennen, dass die Benutzung des Satzes der virtuellen Verrückungen eigentlich nur für solche Fälle bequem ist, bei denen die Reibung nicht berücksichtigt werden soll. Dieses Ergebnis prägt sich auch in der Weise aus, wie der Satz in der Mechanik Anwendung gefunden hat. Er wurde nämlich für den Hebel, für Rollen und Flaschenzüge von Stevin (geb. 1548 zu Brügge, gest. 1620 zu Haag) als gültig erkannt, für die schiefe Ebene und den Keil 1655 von Galilei (geb. 18. Februar 1564 zu Pisa, gest. 8. Januar 1642 zu Arcetri). Joh. Bernoulli (geb. 1667 zu

Basel, gest. daselbst 1748) zeigte 1717, dass der allgemeine Satz der willkürlichen Verrückungen zur Lösung aller Aufgaben des Gleichgewichts benutzt werden könne, und Lagrange (geb. 1736 zu Turin, gest. 1813 zu Paris) hat ihn 1788 zu einer der Grundlagen seines Werkes über analytische Mechanik gemacht. Bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts berechnete man die Wirkung von Maschinen noch ohne eingehende Berücksichtigung der Reibung und konnte daher mit der Behandlung einer Maschine als Ganzes nach dem Satze der virtuellen Verrückungen sich begnügen. Die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper wurden von Poinsot (geb. 1774 zu Paris, gest. daselbst 1859) in der jetzt gebräuchlichen Form entwickelt.

Mit den Fortschritten des Maschinenbaues ergab sich die Nothwendigkeit einer genaueren Berechnung unter Berücksichtigung aller Reibungswiderstände; dies führte zu einer eingehenden Betrachtung der einzelnen Maschinentheile und aller an ihnen auftretenden Kräfte, wozu die Gleichgewichtsbedingungen in der im 1. Theile, S. 146 mitgetheilten Form besser geeignet waren als der Satz der willkürlichen Verrückungen. Erleichtert wurden diese Rechnungen noch durch die Benutzung des Reibungswinkels (s. 1. Theil, S. 190), des Kraftecks und des Seilecks (s. 1. Theil, S. 118). Erneute Anwendung hat nun aber der Satz der virtuellen Verrückungen gefunden für die Berechnung der Fachwerke, u. zw. 1864 durch Clerk Maxwell (geb. 1830, gest. 1879) und im Jahre 1874 durch Mohr in Dresden (s. Keck, Elasticitätslehre, S. 207).

Da die Fachwerke als Verbindungen von Stäben mit reibungslosen Gelenken aufgefasst werden, so sind sie für die Anwendung des Satzes der virtuellen Verrückungen in hervorragender Weise geeignet (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 207, 250, 255).

c) Aufzugsmaschinen.

Bei der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde sind die einzelnen Theile des Triebwerkes derartig mit einander verkuppelt, dass irgend einer Geschwindigkeit v der Kurbel eine dadurch genau bestimmte Geschwindigkeit c der Last Q entspricht. Es ist $v:c$ das durch den geometrischen Zusammenhang bedingte Uebersetzungsverhältnis der Winde. Die Triebkraft K und die Last Q sind die