

Da der Gleichgewichtszustand in manchen Fällen nur bei einer bestimmten Lage der Massengruppe besteht, also bei einer endlichen Verrückung gestört werden könnte, so darf man im Allgemeinen zur Ermittlung der Bedingungen des Gleichgewichts nur unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Hiernach lautet der **Satz der virtuellen Verrückungen**:

Befindet sich eine Massengruppe im Gleichgewichte, so ist für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null; die Arbeiten dieser unbedingten Kräfte bei virtuellen Verrückungen heißen virtuelle Arbeiten. Die Normalwiderstände einer vorgeschriebenen Fläche oder Linie, die Kräfte, welche Zahnräder auf einander ausüben, sind zwar bedingte Kräfte, die keine virtuellen Arbeiten liefern; dies gilt aber nicht von etwaigen Reibungswiderständen, die beim Gleiten unter Einwirkung dieser Kräfte entstehen und von ihnen abhängig sind. Die Reibungswiderstände verrichten auch bei virtuellen Verrückungen Arbeit und sind deshalb den unbedingten Kräften beizuzählen. Aus diesem Grunde eignet sich der Satz der virtuellen Verrückungen besonders für die Behandlung solcher Aufgaben, bei denen Reibungswiderstände nicht zu berücksichtigen sind, so dass dann auch die betreffenden Normaldrücke gar nicht ermittelt zu werden brauchen.

## 2. Anwendungen der Sätze der willkürlichen bzw. der virtuellen Verrückungen.

### a) Hebel.

Es sei  $O$  (Fig. 125) die feste Drehachse des Hebels,  $A$  der Angriffspunkt der Last  $Q$ ,  $B$  derjenige der bewegenden Kraft  $K$ . Drehachse und Gelenkbolzen seien reibungslos. Eine unendlich kleine virtuelle Verrückung besteht in einer unendlich kleinen Drehung des Hebels um die feste Achse  $O$ . Der Drehungswinkel sei  $d\alpha$ . Dann beschreiben  $A$  und  $B$  Drehungsbogen

$$\widehat{AA_1} = \overline{AO} \cdot d\alpha \quad \text{und} \quad \widehat{BB_1} = \overline{BO} \cdot d\alpha,$$

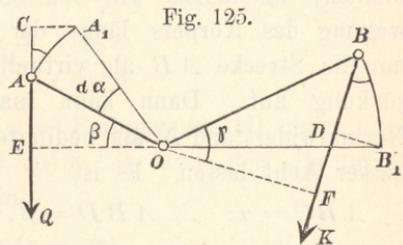


Fig. 125.

welche als geradlinig und rechtwinklig zu  $AO$  und  $BO$  angesehen werden können. Ist  $\beta$  der Winkel, den  $AO$  mit der Rechtwinkligen  $OE$  zu der Last  $Q$  bildet, so findet sich der gleiche Winkel  $\beta$  auch zwischen  $AA_1$  und der Last  $Q$ , so dass die Projektion von  $AA_1$  auf die Richtung von  $Q$  ist

$$AC = AA_1 \cos \beta = AO \cdot d\alpha \cdot \cos \beta = OE \cdot d\alpha.$$

Ebenso wird auf der rechten Seite

$$BD = BB_1 \cdot \cos \gamma = OB \cdot \cos \gamma \cdot d\alpha = OF \cdot d\alpha.$$

Der Widerstand der Drehachse  $O$  sowie die inneren Spannungen des als starr angenommenen Hebels sind bedingte Kräfte. Unbedingte Kräfte sind nur die Last  $Q$  und die treibende Kraft  $K$ ; daher gilt nach dem Satze der virtuellen Verrückungen

$$0 = -Q \cdot AC + K \cdot BD, \text{ oder}$$

$$K \cdot OF \cdot d\alpha = Q \cdot OE \cdot d\alpha, \text{ d. h.}$$

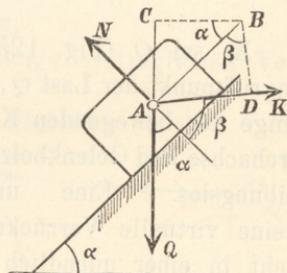
$$K \cdot OF = Q \cdot OE.$$

Dies ist nichts anderes als die Momentengleichung für den Hebel in Bezug auf seine Drehachse (s. 1. Theil, S. 151).

### b) Schiefe Ebene.

Soll ein Körper vom Gewichte  $Q$  auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel  $\alpha$  durch eine Kraft  $K$ , welche mit der Normalen der Ebene den Winkel  $\beta$  einschliesst, gleichförmig aufwärts gezogen werden (Fig. 126) und soll dabei die Reibung zunächst unberücksichtigt bleiben, so fassen wir eine Gleitbewegung des Körpers längs der Ebene um die Strecke  $AB$  als virtuelle Verrückung auf. Dann kann man den Normalwiderstand  $N$  als bedingte Kraft ausser Acht lassen. Es ist

Fig. 126.



$$\sphericalangle ABC = \alpha; \quad \sphericalangle ABD = \beta, \text{ somit}$$

$$1) \quad 0 = -Q \cdot AB \cdot \sin \alpha + K \cdot AB \cdot \sin \beta, \text{ oder}$$

$$2) \quad K = Q \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Diese Gleichung gilt auch für gleichförmige Abwärtsbewegung und auch für die Ruhe des Körpers.

Soll aber die Reibung  $f \cdot N$  mit berücksichtigt werden, etwa für die Aufwärtsbewegung, so ergibt sich zunächst leicht wie Gl. 1:

$$0 = -Q \cdot AB \cdot \sin \alpha + K \cdot AB \cdot \sin \beta - fN \cdot AB, \quad \text{oder}$$

3) 
$$K \cdot \sin \beta = Q \cdot \sin \alpha + fN.$$

Nun aber muss man noch  $N$  finden, und dies ist mittels einer virtuellen Verrückung, d. h. einer solchen längs der Ebene, nicht möglich; man muss hierzu den allgemeinen Satz der willkürlichen Verrückungen (S. 153) anwenden. Wir ertheilen (Fig. 127) dem Körper eine Parallelverschiebung um die Strecke  $AE$  im Sinne von  $N$  und behandeln diese nur insofern als eine virtuelle Verrückung in beschränkter Form, indem wir den Körper als eine starre Massengruppe sich parallel verschieben lassen.  $N$  gehört nun zu den unbedingten Kräften. Der Verschiebungsweg  $AE$  giebt auf den Richtungen von  $Q$ ,  $K$  und  $f \cdot N$  die Projektionen:  $AE \cdot \cos \alpha$ ;  $AE \cdot \cos \beta$  und Null. Daher wird

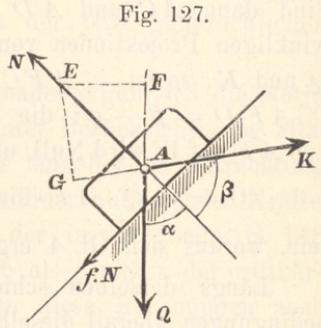


Fig. 127.

$$0 = N \cdot AE - Q \cdot AE \cdot \cos \alpha - K \cdot AE \cdot \cos \beta, \quad \text{also}$$

$$N = Q \cdot \cos \alpha + K \cdot \cos \beta.$$

Setzt man dies in Gl. 3 ein, so ergibt sich

$$K \sin \beta = Q \sin \alpha + fQ \cos \alpha + fK \cos \beta \quad \text{oder}$$

$$K = Q \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\sin \beta - f \cos \beta}.$$

Vertauscht man noch  $f$  mit  $\operatorname{tg} \varphi$  ( $\varphi =$  Reibungswinkel) und multipliziert in Zähler und Nenner mit  $\cos \varphi$ , so lässt sich die letzte Gleichung leicht zusammenziehen in

4) 
$$K = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)}$$

(vergl. 1. Theil, S. 195, Gl. 6).

Allerdings kann man diese Gleichung auch unmittelbar erhalten, indem man für den zu betrachtenden Sinn der Gleitbewegung (in diesem Fall also nach aufwärts) die Richtung des Gesamtwiderstandes  $W$  der schiefen Ebene, d. h. der Mittelkraft aus  $N$  und  $f \cdot N$ , bestimmt, welche von  $N$  um den Reibungswinkel  $\varphi$  abweicht, und dem Körper dann eine Verschiebung  $AF$ , rechtwinklig zu  $W$  erteilt (Fig. 128). Sind dann  $AC$  und  $AD$  die rechtwinkligen Projektionen von  $AF$  auf  $Q$  und  $K$ , so ist  $\sphericalangle AFC = \alpha + \varphi$ ,  $\sphericalangle AFD = \beta - \varphi$ ; die Projektion von  $AF$  auf  $W$  wird Null, und es muss

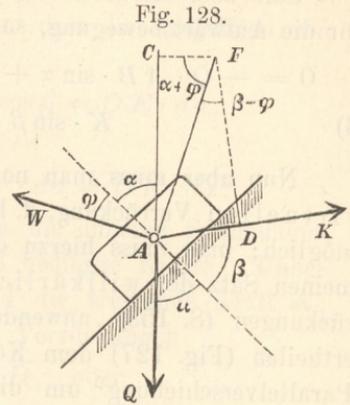


Fig. 128.

$$0 = -Q \cdot AF \cdot \sin(\alpha + \varphi) + K \cdot \overline{AF} \cdot \sin(\beta - \varphi)$$

sein, woraus sich Gl. 4 ergibt.

Längs derselben schiefen Ebene bleiben die Gleichgewichtsbedingungen überall dieselben; daher war es in diesem Falle gleichgültig, ob die Verrückung endlich oder unendlich klein gewählt wurde. Sollte aber der Körper auf einer gekrümmten Fläche durch die Kraft  $K$  gehalten, oder langsam aufwärts bewegt oder auch langsam hinabgelassen werden (Fig. 129), so würde die Kraft  $K$  von dem Winkel  $\alpha$  abhängig sein; daher muss man in diesem Fall unendlich kleine Verrückungen benutzen.

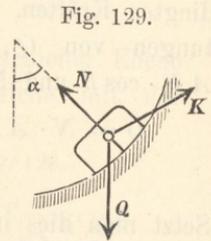


Fig. 129.

**Geschichtliches.** Aus der Behandlung des Körpers auf schiefer Ebene ist leicht zu erkennen, dass die Benutzung des Satzes der virtuellen Verrückungen eigentlich nur für solche Fälle bequem ist, bei denen die Reibung nicht berücksichtigt werden soll. Dieses Ergebnis prägt sich auch in der Weise aus, wie der Satz in der Mechanik Anwendung gefunden hat. Er wurde nämlich für den Hebel, für Rollen und Flaschenzüge von Stevin (geb. 1548 zu Brügge, gest. 1620 zu Haag) als gültig erkannt, für die schiefe Ebene und den Keil 1655 von Galilei (geb. 18. Februar 1564 zu Pisa, gest. 8. Januar 1642 zu Arcetri). Joh. Bernoulli (geb. 1667 zu

Basel, gest. daselbst 1748) zeigte 1717, dass der allgemeine Satz der willkürlichen Verrückungen zur Lösung aller Aufgaben des Gleichgewichts benutzt werden könne, und Lagrange (geb. 1736 zu Turin, gest. 1813 zu Paris) hat ihn 1788 zu einer der Grundlagen seines Werkes über analytische Mechanik gemacht. Bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts berechnete man die Wirkung von Maschinen noch ohne eingehende Berücksichtigung der Reibung und konnte daher mit der Behandlung einer Maschine als Ganzes nach dem Satze der virtuellen Verrückungen sich begnügen. Die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper wurden von Poinsot (geb. 1774 zu Paris, gest. daselbst 1859) in der jetzt gebräuchlichen Form entwickelt.

Mit den Fortschritten des Maschinenbaues ergab sich die Nothwendigkeit einer genaueren Berechnung unter Berücksichtigung aller Reibungswiderstände; dies führte zu einer eingehenden Betrachtung der einzelnen Maschinentheile und aller an ihnen auftretenden Kräfte, wozu die Gleichgewichtsbedingungen in der im 1. Theile, S. 146 mitgetheilten Form besser geeignet waren als der Satz der willkürlichen Verrückungen. Erleichtert wurden diese Rechnungen noch durch die Benutzung des Reibungswinkels (s. 1. Theil, S. 190), des Kraftecks und des Seilecks (s. 1. Theil, S. 118). Erneute Anwendung hat nun aber der Satz der virtuellen Verrückungen gefunden für die Berechnung der Fachwerke, u. zw. 1864 durch Clerk Maxwell (geb. 1830, gest. 1879) und im Jahre 1874 durch Mohr in Dresden (s. Keck, Elasticitätslehre, S. 207).

Da die Fachwerke als Verbindungen von Stäben mit reibungslosen Gelenken aufgefasst werden, so sind sie für die Anwendung des Satzes der virtuellen Verrückungen in hervorragender Weise geeignet (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 207, 250, 255).

### c) Aufzugsmaschinen.

Bei der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde sind die einzelnen Theile des Triebwerkes derartig mit einander verkuppelt, dass irgend einer Geschwindigkeit  $v$  der Kurbel eine dadurch genau bestimmte Geschwindigkeit  $c$  der Last  $Q$  entspricht. Es ist  $v:c$  das durch den geometrischen Zusammenhang bedingte Uebersetzungsverhältnis der Winde. Die Triebkraft  $K$  und die Last  $Q$  sind die

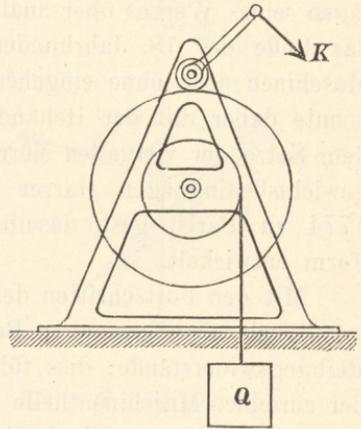
einzig unbedingten Kräfte, während alle anderen Kräfte, nämlich die inneren Spannungen der Kurbel, des Kurbelarmes und der übrigen Theile des Triebwerks und des Gestelles, die Widerstände der Achsen, die Kräfte zwischen den Zähnen zu den bedingten Kräften gehören. Unter Vernachlässigung der Reibungswiderstände wird dann für ein Zeittheilchen  $dt$

$$0 = K \cdot v \cdot dt - Q \cdot c \cdot dt$$

oder  $Q : K = v : c$ . Hierin liegt der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren“ (s. 1. Theil, S. 215). Aus der hier benutzten Weise der Herleitung erkennt man, dass der Satz für alle einfachen Maschinen gelten muss, solange man die Reibungswiderstände vernachlässigt.

Ein Körper, der an einem Punkt oder einer Achse befestigt ist, kann im Gleichgewichtszustande sich nur befinden, indem er ruht; denn die Drehbewegung um den festen Punkt oder die feste Achse, welche die einzig möglichen Bewegungen sind, ertheilen den einzelnen Massenpunkten krummlinige Bewegungen, während das Gleichgewicht eines Massenpunktes durch Ruhe oder geradlinige, gleichförmige Bewegung bedingt ist. Ertheilt man aber der Kurbel der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde eine gleichmässige Drehbewegung, so wird, wie die vorstehende Entwicklung zeigt, die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null. Wollte man also den auf S. 157 ausgesprochenen Satz der virtuellen Verrückungen in der umgekehrten Fassung bringen: Eine Massengruppe befindet sich im Gleichgewichte, wenn für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null ist, so müsste noch hinzugefügt werden: unter der Voraussetzung, dass in der Massengruppe nicht etwa schon Winkelgeschwindigkeiten um feste Achsen oder Punkte bestehen. Denn der Umstand,

Fig. 130.

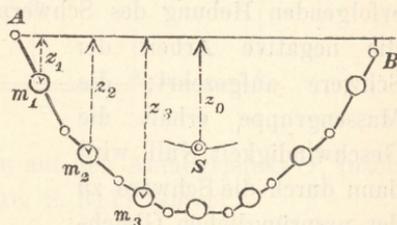


dass die virtuelle Arbeit Null ist, schliesst nur beschleunigte, nicht aber gleichförmige Drehbewegungen aus. Eine gleichförmige Drehung hat auf die Beziehung zwischen den unbedingten Kräften keinen Einfluss, wenn man von der Reibung absieht. Durch eine solche Drehung werden in den umlaufenden Theilen besondere, von der Winkelgeschwindigkeit abhängende Spannungen (s. 2. Theil, S. 93) hervorgerufen; im Allgemeinen werden auch die Widerstände der festen Achsen dadurch beeinflusst; doch fällt der letztere Einfluss fort, wenn die Drehachsen freie Achsen sind (s. 1. Theil, S. 289). Die durch die Umlaufgeschwindigkeit erzeugten inneren Spannungen sind in sehr vielen Fällen, z. B. bei den durch Muskelkraft bewegten Aufzugsmaschinen, im Vergleiche mit den bei der Geschwindigkeit Null auftretenden Spannungen verschwindend klein; daher man auf den Unterschied zwischen gleichförmiger Drehbewegung und Ruhezustand meist gar keine Rücksicht nimmt. Bei Körpern mit grosser Umlaufgeschwindigkeit, z. B. Schwungrädern, Mühlsteinen (s. 2. Theil, S. 96), Schleudermaschinen (s. 2. Theil, S. 201) haben diese Spannungen aber maßgebende Bedeutung.

#### d) Gelenkstangen-Verbindungen.

$A$  und  $B$  (Fig. 131) seien die Aufhängegelenke einer Gelenkstangen-Verbindung. Die einzelnen Stäbe seien starr und durch reibungslose Gelenke mit einander verbunden. Das Gewicht jedes Stabes sei zu einem Massenpunkt  $m$  vereinigt gedacht. Diese Massen  $m_1, m_2, m_3 \dots$  mögen um  $z_1, z_2, z_3 \dots$  unter einer festen wagerechten Ebene liegen; es soll eine Beziehung für die Ruhelage der Stangenverbindung gesucht werden.

Fig. 131.



Wird der Stangenverbindung eine unendlich kleine virtuelle Verrückung aus der Ruhelage ertheilt, so sind die inneren Spankräfte der Stäbe, die Widerstände der Widerlagergelenke, die gegenseitigen Kräfte in den Zwischengelenken durchweg bedingte Kräfte; virtuelle Arbeiten werden nur von den Gewichten  $m_1 g, m_2 g \dots$

verrichtet. Erfährt nun eine der Massen  $m$  bei der unendlich kleinen Verrückung eine Senkung um  $dz$ , so ist die entsprechende virtuelle Arbeit  $m \cdot g \cdot dz$ , und es muss, von der Ruhelage aus gerechnet,

$$0 = \Sigma(m \cdot g \cdot dz) = g \{m_1 \cdot dz_1 + m_2 \cdot dz_2 + \dots\} \text{ sein.}$$

Dafür kann man, weil die Massen unveränderlich sind, auch schreiben

$$0 = g \cdot d(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots).$$

Hat der Schwerpunkt  $S$  der Massen  $m$  in der Ruhelage eine Tiefe  $z_0$  unter der festen wagerechten Ebene, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\Sigma m \cdot z = M \cdot z_0$$

(s. 1. Theil, S. 139), wenn  $M = \Sigma m$  die Gesamtmasse bedeutet. Daher wird

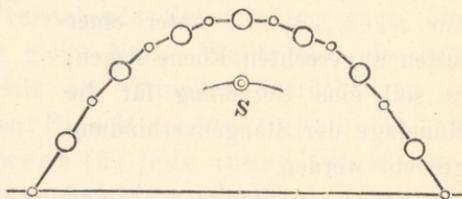
$$0 = d(M \cdot z_0) = M \cdot dz_0 \text{ oder } dz_0 = 0$$

die Bedingung für die Ruhelage der Gelenkstangen-Verbindung.

Bei einer unendlich kleinen virtuellen Verrückung darf der Schwerpunkt der gesammten Masse sich weder heben noch senken, d. h. er muss in der Ruhelage entweder möglichst tief oder möglichst hoch liegen.

Befindet sich der Schwerpunkt  $S$  in der Ruhelage so tief wie möglich, so wird einer endlichen virtuellen Verrückung eine Bahnlinie des Schwerpunktes entsprechen, wie in Fig. 131 angedeutet. Erfolgt die Verrückung aus der Gleichgewichtslage etwa durch einen leichten seitlichen Stoss, welcher der Massengruppe ein gewisses Arbeitsvermögen ertheilt, so wird dieses bei der nunmehr erfolgenden Hebung des Schwerpunktes aus der tiefsten Lage durch die negative Arbeit der Schwere aufgezehrt; die Massengruppe erhält die Geschwindigkeit Null, wird dann durch die Schwere zu der ursprünglichen Gleichgewichtslage zurückgeführt, führt um diese Schwingungen aus und kommt, nachdem letztere durch Widerstände vernichtet sind, schliesslich in der sicheren (stabilen) Gleichgewichtslage zur Ruhe. Lag der Schwerpunkt aber im Gleichgewichtszustande so hoch wie möglich (Fig. 132), so wird der,

Fig. 132.





Frage stellt: Nach welcher Kurve muss eine bei  $A$  und  $B$  befestigte Kette von gegebener Länge geformt sein, damit ihr Schwerpunkt so tief wie möglich liege. Die Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe der Variationsrechnung führt thatsächlich auf die Gleichung 1. Diese Behandlung überschreitet den Rahmen unseres Buches; doch möge der Nachweis geführt werden, dass, wenn man die im Gleichgewichte befindliche Kette  $ACB$  bei  $C$  lothrecht abwärts zieht und dadurch (annähernd) in die geknickte Form  $AC'B$  überführt, der Gesamtschwerpunkt sich von  $S$  nach  $S'$  hebt.

Hat der Aufhängepunkt  $B$  die Koordinaten  $x_1$  und  $y_1$ , so findet man die Bogenlänge  $CB = s$  leicht zu

$$2) \quad s = \frac{1}{2} r \left( e^{\frac{x_1}{r}} - e^{-\frac{x_1}{r}} \right).$$

Für die Höhe des Schwerpunktes  $S$  der Kettenlinie  $ACB = 2s$  über  $O$  gilt dann, wenn man den Faktor 2 beiderseits fortlässt:

$$s \cdot y_0 = \int_0^{x_1} ds \cdot y = \frac{1}{r} \int_0^{x_1} y^2 \cdot dx,$$

weil, wie man leicht erkennt,

$$ds = \frac{1}{r} \cdot y \cdot dx \text{ ist.}$$

Dann wird

$$s \cdot y_0 = \frac{r}{4} \int_0^{x_1} \left( e^{\frac{2x}{r}} + 2 + e^{-\frac{2x}{r}} \right) dx \text{ oder}$$

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{r^2}{8} \left( e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}} \right).$$

Weil aber nach Gl. 1 und 2

$$y_1 s = \frac{r^2}{4} \left( e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}} \right),$$

so kann man schreiben

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{y_1 \cdot s}{2}; \text{ mithin}$$

$$y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2s} + \frac{y_1}{2},$$

oder für die Tiefe des Schwerpunktes  $S$  unter der Sehne  $AB$ :

$$z_0 = y_1 - y_0 = \frac{y_1}{2} - \frac{r \cdot x_1}{2s}.$$

Wird die Kette vor der Länge  $2s$ , aber in die Form  $AC'B$  gebracht, so ist  $AC' = s$  und die Tiefe des Schwerpunktes unter  $AB$

$$z_1 = \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - x_1^2}.$$

Es ist zu beweisen, dass  $z_0 > z_1$ , oder  $z_0^2 > z_1^2$ ; zu dem Ende setzen wir  $z_0^2 - z_1^2 = U$  und untersuchen, ob  $U > 0$  ist. Es wird

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4} \left\{ y_1^2 - \frac{2 y_1 r \cdot x_1}{s} + \frac{r^2 \cdot x_1^2}{s^2} - s^2 + x_1^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ x_1^2 \left( \frac{r^2 + s^2}{s^2} \right) - \frac{2 y_1 r \cdot x_1}{s} + y_1^2 - s^2 \right\}. \end{aligned}$$

Nach den Gl. 1 und 2 findet man leicht

$$r^2 + s^2 = y_1^2; \quad y_1^2 - s^2 = r^2, \quad \text{so dass}$$

$$U = \frac{1}{4} \left\{ \frac{x_1^2 \cdot y_1^2}{s^2} - \frac{2 x_1 y_1 r}{s} + r^2 \right\};$$

da dies ein Quadrat ist, nämlich

$$U = \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{x_1 y_1}{s} - r \right] \right)^2,$$

so ist  $U > 0$ , also bewiesen, dass  $z_0 > z_1$ , dass also beim Geradestrecken der Schwerpunkt sich wirklich gehoben hat.

### e) Klappbrücken.

Soll ein Getriebe, an welchem als unbedingte Kräfte nur Schwerkraften wirken, in jeder Lage im Gleichgewichte sein, so dass bei einer langsamen Bewegung nur Reibungswiderstände überwunden zu werden brauchen, so muss für jede Lage

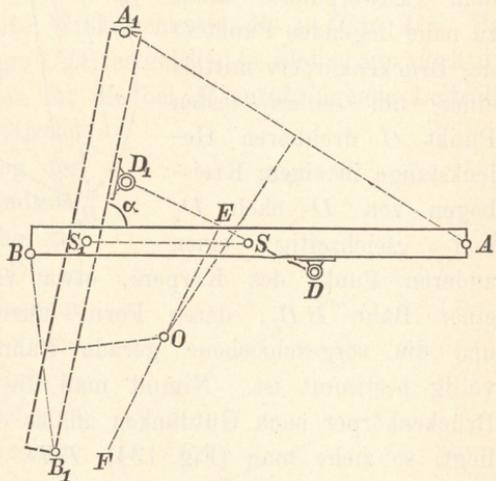
$$dz_0 = 0$$

sein, d. h. es muss die Ordinate  $z_0$  des Schwerpunktes der gesammten Massengruppe stets denselben Werth behalten. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Gesamtschwerpunkt sich bei einer virtuellen Verrückung entweder gar nicht bewegt,

oder doch stets in derselben wagerechten Ebene verbleibt.

Derartige Erwägungen finden Anwendung beim Entwerfen grösserer Klappbrücken. Soll etwa (Fig. 134) der Brückenkörper

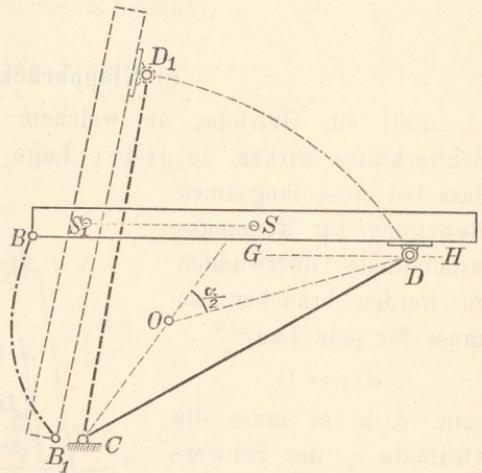
Fig. 134.



$AB$  in die Lage  $A_1B_1$  gebracht werden, so ist dies nach S. 13 am einfachsten durch Drehung um den Punkt  $O$  zu erreichen, den man findet, indem man  $\overline{AA_1}$  zieht und in der Mitte derselben eine Winkelrechte errichtet, ebenso  $B$  mit  $B_1$  verbindet und in der Mitte von  $BB_1$  eine Normale zu  $BB_1$  zeichnet; dann ist  $O$  der Schnittpunkt der beiden Normalen. Bei einer Drehung um  $O$  würde aber jeder Punkt, also auch der Schwerpunkt  $S$  des Brückenkörpers einen Kreisbogen beschreiben, so dass hierdurch die gestellte Bedingung nicht erfüllt wird. Soll die Bewegung nun so geregelt werden, dass der Schwerpunkt eine Wagerechte beschreibt, so könnte man zunächst auf den Gedanken kommen, den Schwerpunkt unmittelbar längs einer Gleitbahn  $SS_1$  zu führen. Diese Lösung ist, aber nicht brauchbar, weil

Fig. 135.

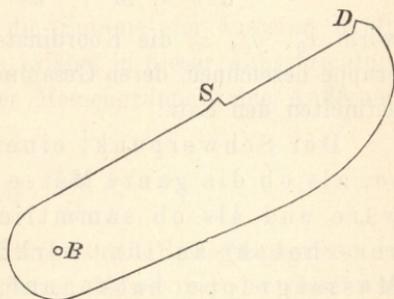
der rechts von der aufgerichteten Klappe befindliche Raum von festen Theilen grösstentheils frei bleiben soll, um Schiffen die Durchfahrt zu gestatten. Man führt daher (Fig. 135) einen dem Schwerpunkte nicht zu nahe liegenden Punkt  $D$  des Brückenkörpers mittels einer um einen festen Punkt  $C$  drehbaren Gelenkstange in einem Kreisbogen von  $D$  nach  $D_1$  und gleichzeitig einen



anderen Punkt des Körpers, etwa  $B$ , mittels einer Rolle in einer Bahn  $BB_1$ , deren Form durch den Kreisbogen  $DD_1$  und die vorgeschriebene gerade Bahn  $SS_1$  des Schwerpunktes völlig bestimmt ist. Nimmt man die Lage des Punktes  $D$  am Brückenkörper nach Gutdünken an, so dass dadurch auch  $D_1$  festliegt, so ziehe man (Fig. 134)  $DD_1$  und in der Mitte  $E$  von  $DD_1$  eine Rechtwinklige  $EF$  zu  $DD_1$ . Dann muss der feste Drehpunkt  $C$  der Gelenkstange  $DC$  jedenfalls auf  $EF$  liegen. Da bei einer Drehung des Brückenkörpers um  $O$  (Fig. 134)  $D$  auch nach  $D_1$  gelangen würde, so muss die Gerade  $EF$  auch den

Punkte  $O$  enthalten. Auf  $EF$  kann der Drehpunkt  $C$  beliebig gewählt werden. Da aber die Gelenkstange  $CD$  in dem geöffneten Zustande der Brücke eine Lage  $CD_1$  (Fig. 135) haben muss, welche den Raum für die freie Durchfahrt nicht beengt, da es ferner für die feste Lagerung des Drehpunktes  $C$  erwünscht sein wird, denselben etwa in gleicher Tiefe mit  $B_1$  anzuordnen, so wird die Gerade  $EF$  (Fig. 134) vielleicht einen zweckmässig liegenden Drehpunkt  $C$  nicht enthalten, so dass also die willkürliche Annahme des Punktes  $D$  nicht glücklich war. Man kann dann auch umgekehrt den Drehpunkt  $C$  an passend erscheinender Stelle annehmen, für den Angriffspunkt  $D$  der Gelenkstange aber vielleicht nur eine gewisse Tiefe, d. h. einen gewissen Abstand von der Brückentafel, gegeben durch eine Gerade  $GH$  (Fig. 135), festsetzen und nun die Lage des Angriffspunktes  $D$  in der Geraden  $GH$  durch Zeichnung in folgender Weise finden. Eine Gerade  $CO$  bestimmt diejenige Linie, welche in Fig. 134  $EF$  genannt wurde. Ist nun  $\alpha$  der gesammte Winkel, um den die Brückentafel gedreht werden soll, so ist  $\alpha$  zugleich der gemeinschaftliche Centriwinkel aller Kreisbögen, die bei einer Drehung um  $O$  von sämtlichen Theilen der Brückenbahn, also auch von  $D$ , beschrieben werden würden. Trägt man im Punkte  $O$  an die nach oben verlängerte  $CO$  den Winkel  $\frac{1}{2}\alpha$  an, so schneidet der zweite Winkelschenkel die  $GH$  in  $D$ . Hat man somit die Gelenkstange  $CD$  festgelegt, so bleibt nur noch die Form des Führungsschlitzes für die bei  $B$  anzubringende Leitrolle zu bestimmen. Eine analytische Entwicklung der Gleichung der Bahnlinie  $BB_1$  ist so umständlich, dass man die zeichnerische Ermittlung vorziehen wird. Die in der Brückentafel gegen einander fest liegenden Punkte  $D$ ,  $S$  und  $B$  (Fig. 135) bilden ein Dreieck; lässt man  $D$  auf dem Kreisbogen  $DD_1$ ,  $S$  auf der Wagerechten  $SS_1$  sich bewegen, so beschreibt  $B$  die Bahnlinie  $BB_1$  der Führungsrolle. Man bestimmt daher die Punkte der Kurve  $BB_1$  am bequemsten und sichersten, indem man das Dreieck  $DSB$

Fig. 136.



auf Pauspapier zeichnet oder aus starkem Kartenpapier so ausschneidet (Fig. 136), dass man  $D$  und  $S$  auf  $DD_1$  bzw.  $SS_1$  verschiedene Lagen geben und bei  $B$  jedesmal einen Zirkelstich machen kann.

## B. Bewegung einer Massengruppe.

### I. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes; Satz vom Antriebe.

Schon im 1. Theil, S. 141 wurden die Gleichungen abgeleitet:

$$1) \quad \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Darin bedeuteten  $x$ ,  $y$  und  $z$  die augenblicklichen Koordinaten eines Massenpunktes  $m$ ,

$$X = \Sigma K \cos \alpha, \quad Y = \Sigma K \cos \beta, \quad Z = \Sigma K \cos \gamma$$

die Summe der in den einzelnen Achsenrichtungen auftretenden Seitenkräfte der äusseren Kräfte  $K$ . Daraus folgten nach der Lehre vom Schwerpunkte die Gleichungen

$$2) \quad \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{X}{M}; \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{Y}{M}; \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{Z}{M},$$

worin  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  die Koordinaten des Schwerpunktes der Massengruppe bezeichnen, deren Gesamtmasse  $M$  ist. Diese Gleichungen 2 enthielten den Satz:

Der Schwerpunkt einer Massengruppe bewegt sich so, als ob die ganze Masse der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämmtliche äussere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte der Massengruppe haben auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss.

Sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so kann der Schwerpunkt der Massengruppe sich nur geradlinig und gleichförmig bewegen.