

### Dritte Abtheilung.

## Mechanik einer Gruppe von Massenpunkten.

Jede beliebige Anzahl von Massenpunkten, deren Bewegungen in irgend welchen Beziehungen zu einander stehen, oder deren gleichzeitige Bewegungen wir betrachten, kann in ihrer Gesamtheit als eine Massengruppe angesehen werden. In der Regel werden die einzelnen Massenpunkte einer Gruppe gegenseitige Kräfte auf einander ausüben, die man als innere Kräfte der Gruppe bezeichnet; in Folge davon wird die Bewegung eines Punktes der Gruppe einen gewissen Einfluss auf die Bewegung der anderen Punkte ausüben. Aber auch, wenn diese Kräfte Null sind, so dass die Massenpunkte gar nicht auf einander einwirken, kann man sie als eine Gruppe von Massenpunkten auffassen.

---

### A. Gleichgewicht einer Massengruppe.

---

#### I. Satz der willkürlichen Verrückungen; Satz der virtuellen Verrückungen.

Man bezeichnet eine Massengruppe als im Gleichgewichte befindlich, wenn jeder ihrer Massenpunkte im Gleichgewicht ist, d. h. ruht, oder sich gleichförmig, geradlinig bewegt. Damit dies der Fall sei, müssen die an jedem Massenpunkte wirkenden Kräfte sich aufheben, d. h. eine Mittelkraft von der Grösse Null liefern.

Diese Mittelkraft Null verrichtet bei jeder Bewegung des Massenpunktes auch eine Arbeit von der Grösse Null. Da nun für einen Massenpunkt die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist (nach 1. Theil, S. 43), so muss, wenn die an einem Massenpunkte wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, die Arbeitssumme dieser Kräfte bei jeder Bewegung des Massenpunktes sich zu Null ergeben. Auch wenn der Massenpunkt in Wirklichkeit sich gar nicht bewegt, kann man, um aus der Nullsetzung der Arbeitssumme der an ihm wirkenden Kräfte die erforderlichen Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte abzuleiten, ihm irgend eine beliebige Bewegung ertheilt denken und kann diese gedachte Bewegung stets so wählen, wie es für die gerade gewünschte Bedingungsgleichung zweckmässig erscheint.

Befindet sich z. B. ein Massenpunkt in Ruhe unter Einwirkung eines gegebenen Gewichtes  $Q$  und zweier Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ , deren Grössen unbekannt sind, deren Richtungen aber mit der Lothrechten gegebene Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  bilden (Fig. 120), so kann man die Grössen der Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  durch Nullsetzung der Arbeitssumme bei zwei beliebigen Bewegungen finden. Denkt man zunächst dem Massenpunkt eine wagerechte Bewegung  $AB$  ertheilt, so verrichtet die Schwerkraft  $Q$  dabei keine Arbeit (nach 1. Theil, S. 42/43), weil  $Q$  rechtwinklig zu  $AB$  ist. Die Wegeslänge  $AB$  giebt auf der Richtung von  $K_1$  eine Projektion  $AB \cdot \sin \alpha_1$ , auf der Richtung von  $K_2$  eine Projektion  $-AB \cdot \sin \alpha_2$ . Sonach liefert die Nullsetzung der Arbeitssumme

$$0 = K_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha_1 - K_2 \cdot AB \cdot \sin \alpha_2 \quad \text{oder}$$

$$1) \quad 0 = K_1 \cdot \sin \alpha_1 - K_2 \sin \alpha_2.$$

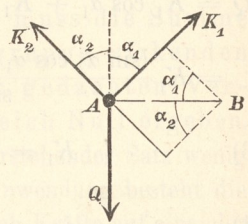
Denkt man dagegen dem Massenpunkt eine lothrechte Bewegung  $AC$  ertheilt (Fig. 121), so verrichtet

$$Q \quad \text{die Arbeit} \quad - Q \cdot AC,$$

$$K_1 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad K_1 \cdot AC \cdot \cos \alpha_1,$$

$$K_2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad K_2 \cdot AC \cdot \cos \alpha_2.$$

Fig. 120.



Sonach liefert die Nullsetzung der Arbeitssumme:

$$0 = -Q \cdot AC + K_1 \cdot AC \cdot \cos \alpha_1 + K_2 \cdot AC \cdot \cos \alpha_2 \quad \text{oder}$$

$$2) \quad 0 = -Q + K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2.$$

Diese Gleichungen 1 und 2 sind offenbar nichts anderes als die im 1. Theil, S. 65 gegebene Regel: Es muss die Summe aller wagerechten Seitenkräfte Null sein und die Summe aller lothrechten Seitenkräfte ebenfalls. Nach Gl. 1 ist

$$K_2 = K_1 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2};$$

setzt man dies in Gl. 2 ein, so wird

$$Q = K_1 \cos \alpha_1 + K_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cos \alpha_2$$

$$= K_1 \frac{(\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1)}{\sin \alpha_2} \quad \text{oder}$$

$$3) \quad K_1 = Q \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad \text{ebenso wird}$$

$$4) \quad K_2 = Q \frac{\sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Diese gedachten Bewegungen  $AB$  und  $AC$  waren für die Berechnung von  $K_1$  und  $K_2$  nicht gerade sehr bequem, weil sie auf zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten führten. Man kann die gedachte Bewegung aber auch so einrichten, dass man für jede der Unbekannten nur je eine Gleichung bekommt. Wählt man die gedachte Bewegung  $AD$  rechtwinklig zu  $K_2$  (Fig. 122), so verrichtet  $K_2$  bei der Bewegung  $AD$  die Arbeit Null;  $AD$  liefert auf den Richtungen  $K_1$  und  $Q$  die Projektionen  $AD \cdot \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$  bzw.  $-AD \cdot \sin \alpha_2$ . Die Nullsetzung der Arbeitssumme giebt:

$$0 = K_1 \cdot AD \cdot \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - Q \cdot AD \cdot \sin \alpha_2$$

und führt unmittelbar auf Gl. 3. Man kann also durch zweckmässige Wahl der gedachten Bewegung denselben Vortheil erreichen

Fig. 121.

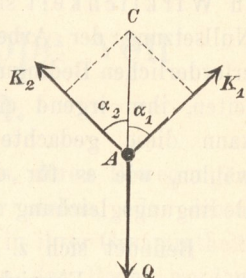
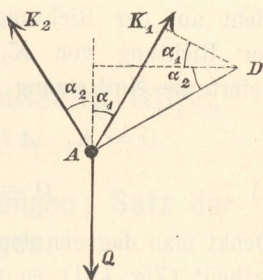


Fig. 122.



wie durch Anwendung der Momenten-Gleichung unter Benutzung eines auf der Richtungslinie von  $K_2$  gelegenen Drehpunktes (vergl. 1. Theil, S. 160; 2. Theil, S. 73). Dieses Verfahren wird besonders dann werthvoll sein, wenn es sich gar nicht um die Entwicklung aller unbekanntener Kräfte handelt, sondern z. B. in dem Falle der Fig. 122 vielleicht nur  $K_1$  ermittelt werden soll.

Wendet man dies nun auf eine Massengruppe an, so kann man jedem Punkte derselben beliebige Bewegungen ertheilt denken und die für jeden Punkt berechnete Arbeitssumme gleich Null setzen. Solche ganz willkürliche Lageänderungen nennt man Verrückungen. An jedem Punkte muss die Arbeitssumme von der Grösse Null sein, mithin auch die Arbeitssumme der ganzen Massengruppe. Daher hat man den **Satz der willkürlichen Verrückungen**: Ist eine Massengruppe im Gleichgewichte, so muss die Summe der von sämtlichen an der Massengruppe wirkenden Kräften bei jeder willkürlichen oder gedachten Verrückung verrichteten Arbeiten sich gleich Null ergeben.

In dieser allgemeinen Form freilich ist vorstehender Satz wenig verwendbar, denn in den meisten Fällen der Anwendung besteht die Massengruppe aus sehr vielen Punkten, die durch Kräfte auf einander wirken, so dass in der Arbeitssumme sehr viel Unbekannte auftreten würden. Die Kräfte lassen sich aber derartig in 2 Gruppen zerlegen, dass die Arbeitssumme der einen Gruppe unter gewissen Bedingungen ohne besondere Untersuchung gleich Null gesetzt werden kann, so dass man nur noch die Arbeitssumme der zweiten Gruppe aufzustellen braucht. In vielen Fällen nämlich sind die einzelnen Massenpunkte nicht ganz frei beweglich, sondern hinsichtlich ihrer Verrückbarkeit an bestimmte Bedingungen gebunden, die sich durch geometrische Gleichungen ausdrücken lassen. Jede Beschränkung der freien Beweglichkeit kann aber auch aufgefasst werden als Wirkung von Kräften, die genau so beschaffen sind, dass sie eine Abweichung von den beschränkenden Bedingungen verhindern. Diese Kräfte mögen Bedingungs- oder bedingte Kräfte genannt werden, während die übrigen Kräfte als unbedingte Kräfte bezeichnet werden sollen.

Bei einer ganz willkürlichen Verrückung der Massenpunkte, welche auf die beschränkenden Bedingungen keine Rücksicht nimmt, würden sowohl die bedingten, wie auch die unbedingten Kräfte

Arbeiten ergeben; ertheilt man aber der Massengruppe nur solche Verrückungen, welche mit den die freie Beweglichkeit beschränkenden Bedingungen verträglich sind, so liefern, wie sich zeigen lässt, die bedingten Kräfte für sich allein die Arbeitssumme Null, so dass man dann zur Prüfung des Gleichgewichtszustandes nur die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null zu setzen braucht. Solche mit gegebenen Bedingungsgleichungen verträgliche Bewegungen einer Massengruppe nennt man **virtuelle Verrückungen** (von virtus = Fähigkeit, Möglichkeit) und die dabei sich ergebenden Arbeiten der bedingten Kräfte **virtuelle Arbeiten**.

Die Beschränkungen der freien Beweglichkeit können verschiedener Art sein:

1. Es können einzelne Punkte unbeweglich, also feste Punkte sein. Sind  $x, y, z$  die Koordinaten eines solchen Punktes  $P$ , so sind die geometrischen Bedingungsgleichungen für die Unbeweglichkeit:

$$x = a; \quad y = b; \quad z = c,$$

worin  $a, b, c$  unveränderliche Grössen bedeuten sollen. Die entsprechende Bedingungskraft ist aber ein Widerstand  $W$ , der den Punkt  $P$  unbeweglich erhält. Virtuelle Verrückungen würden in diesem Falle solche sein, bei denen der Punkt  $P$  seine Lage nicht ändert; dann ergiebt aber auch die bedingte Kraft  $W$  keine Arbeit.

2. Es können einzelne Punkte gezwungen sein, auf gegebenen Flächen zu verbleiben. Für einen solchen Punkt wäre dann die Gleichung der Fläche  $f(x, y, z) = 0$  die Bedingungsgleichung, der Normalwiderstand  $N$  der Fläche die Bedingungskraft. Virtuelle Verrückungen wären solche, bei denen der betreffende Punkt längs der Fläche, d. h. rechtwinklig zu  $N$  bewegt wird, wobei (nach 1. Theil, S. 42/43) von  $N$  keine Arbeit verrichtet wird.

3. Es kann auch ein Theil der Punkte mit einander in starrer Verbindung sein. Die Bedingungsgleichungen sind dann von der Form

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = a^2,$$

wenn  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  die Koordinaten zweier Punkte und  $a$  eine unveränderliche Länge ist. Die Bedingungskräfte sind die inneren Kräfte des starren Körpertheiles, virtuelle Verrückungen solche, bei denen die starr verbundenen Punkte ihre gegenseitigen Abstände

nicht ändern. Die virtuellen Arbeiten der bedingten Kräfte sind dann (nach 1. Theil, S. 144) Null. Auch bei einer Verbindung einzelner Massentheile durch Ketten, Fäden oder dergl. von unveränderlicher Länge sind die virtuellen Arbeiten Null, wenn die Ketten oder Fäden bei der Verrückung nicht schlaff werden.

Auch jeder beliebige Theil eines elastisch-festen oder flüssigen Körpers oder überhaupt einer beliebig veränderlichen Massengruppe kann, wenn er im Gleichgewicht ist, hinsichtlich der Bedingungen des Gleichgewichts wie ein starrer Körper, wie eine Gruppe von starr mit einander verbundenen Massenpunkten behandelt werden. Denn es muss die Arbeitssumme aller an dem betreffenden Theile wirkenden Kräfte (nach S. 153) bei jeder willkürlichen Verrückung Null sein. Als Verrückung kann man daher auch eine solche wählen, bei der die einzelnen Massenpunkte genau in ihrer gegenseitigen Lage verbleiben. D. h. man kann sich jeden beliebigen Theil einer im Gleichgewichte befindlichen Massengruppe, z. B. eines elastisch-festen oder flüssigen Körpers, zur Untersuchung der **Bedingungen** des Gleichgewichts erstarrt denken und auf ihn die Bedingungen des Gleichgewichts starrer Körper anwenden. Die inneren Kräfte der Massengruppe, also die Spannkkräfte elastisch fester Körper, sowie die inneren Normalkräfte flüssiger Körper sind dann bedingte Kräfte und liefern (vergl. a. 2. Theil, S. 231) daher keine Arbeit.

Die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht starrer Körper (s. 1. Theil, S. 146) sind mittels des S. 157 folgenden Satzes der virtuellen Verrückungen sehr leicht zu finden. Die inneren Kräfte kommen dabei nicht in Frage. Sind  $K_1, K_2 \dots$  die äusseren Kräfte,  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \dots$  die Winkel derselben gegen drei rechtwinklig zu einander stehende Achsen, so ergiebt sich, wenn man dem Körper eine Parallelverschiebung parallel der  $x$ -Achse um  $dx$  ertheilt, die Arbeitssumme  $\sum K \cdot \cos \alpha \cdot dx = dx \sum K \cos \alpha$ . Diese muss Null sein, mithin

$$1) \quad \sum K \cos \alpha = 0; \text{ ebenso}$$

$$2) \quad \sum K \cos \beta = 0;$$

$$3) \quad \sum K \cos \gamma = 0.$$

Ertheilt man nun dem Körper eine Drehung um die  $x$ -Achse mit dem Drehungswinkel  $\omega \cdot dt$ , so ist, wenn man mit  $\mathfrak{M}_x$  die Summe der Momente der Kräfte  $K$  in Bezug auf die  $x$ -Achse bezeichnet und zugleich bedenkt, dass nach 1. Theil, S. 221 die Arbeit eines Kräftepaars gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel ist, die virtuelle Arbeit

$$0 = \mathfrak{M}_x \cdot \omega \cdot dt, \text{ mithin}$$

- 4)  $\mathfrak{M}_x = 0$ ; ebenso
- 5)  $\mathfrak{M}_y = 0$ ;
- 6)  $\mathfrak{M}_z = 0$ .

4. Wenn die Theile eines Triebwerkes, Zahnräder (Fig. 123), Reibungsräder, Riemenscheiben (Fig. 124) u. dergl. derartig in einander greifen oder mit einander gekuppelt sind, dass sie an den Stellen des Eingriffes oder der Kuppelung Geschwindigkeiten von genau derselben Grösse haben müssen, so liegen in dem geometrischen Zusammenhange des Triebwerkes die Bedingungsgleichungen. Die bedingten Kräfte sind die durch den Eingriff oder die Kuppelung ausgeübten. Da diese auf die mit einander gekuppelten Maschinentheile gleich und entgegengesetzt wirken, ihre Angriffspunkte auch genau gleiche Geschwindigkeiten haben, so verrichten diese Kräfte bei jeder virtuellen, d. h. mit dem geometrischen Zusammenhange verträglichen Ver-rückung Arbeiten, die sich gegenseitig aufheben.

Fig. 123.

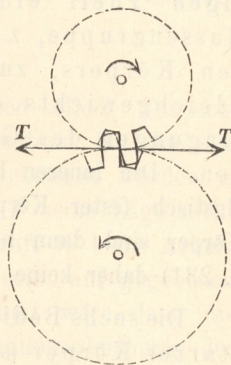
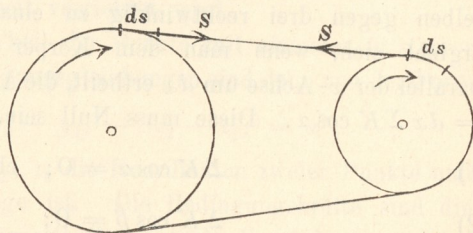


Fig. 124.



Unter einen dieser vier Hauptfälle ist jede Aufgabe zu bringen, bei welcher eine Massengruppe im Gleichgewicht ist und zugleich durch gewisse Bedingungsgleichungen in der freien Beweglichkeit der einzelnen Punkte beschränkt ist.

Da der Gleichgewichtszustand in manchen Fällen nur bei einer bestimmten Lage der Massengruppe besteht, also bei einer endlichen Verrückung gestört werden könnte, so darf man im Allgemeinen zur Ermittlung der Bedingungen des Gleichgewichts nur unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Hiernach lautet der **Satz der virtuellen Verrückungen**:

Befindet sich eine Massengruppe im Gleichgewichte, so ist für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null; die Arbeiten dieser unbedingten Kräfte bei virtuellen Verrückungen heißen virtuelle Arbeiten. Die Normalwiderstände einer vorgeschriebenen Fläche oder Linie, die Kräfte, welche Zahnräder auf einander ausüben, sind zwar bedingte Kräfte, die keine virtuellen Arbeiten liefern; dies gilt aber nicht von etwaigen Reibungswiderständen, die beim Gleiten unter Einwirkung dieser Kräfte entstehen und von ihnen abhängig sind. Die Reibungswiderstände verrichten auch bei virtuellen Verrückungen Arbeit und sind deshalb den unbedingten Kräften beizuzählen. Aus diesem Grunde eignet sich der Satz der virtuellen Verrückungen besonders für die Behandlung solcher Aufgaben, bei denen Reibungswiderstände nicht zu berücksichtigen sind, so dass dann auch die betreffenden Normaldrücke gar nicht ermittelt zu werden brauchen.

## 2. Anwendungen der Sätze der willkürlichen bzw. der virtuellen Verrückungen.

### a) Hebel.

Es sei  $O$  (Fig. 125) die feste Drehachse des Hebels,  $A$  der Angriffspunkt der Last  $Q$ ,  $B$  derjenige der bewegenden Kraft  $K$ . Drehachse und Gelenkbolzen seien reibungslos. Eine unendlich kleine virtuelle Verrückung besteht in einer unendlich kleinen Drehung des Hebels um die feste Achse  $O$ . Der Drehungswinkel sei  $d\alpha$ . Dann beschreiben  $A$  und  $B$  Drehungsbogen

$$\widehat{AA_1} = \overline{AO} \cdot d\alpha \quad \text{und} \quad \widehat{BB_1} = \overline{BO} \cdot d\alpha,$$

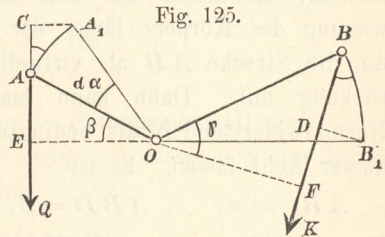


Fig. 125.