Dritte Abtheilung.

Mechanik einer Gruppe von Massenpunkten.

Jede beliebige Anzahl von Massenpunkten, deren Bewegungen in irgend welchen Beziehungen zu einander stehen, oder deren gleichzeitige Bewegungen wir betrachten, kann in ihrer Gesammtheit als eine Massengruppe angesehen werden. In der Regel werden die einzelnen Massenpunkte einer Gruppe gegenseitige Kräfte auf einander ausüben, die man als innere Kräfte der Gruppe bezeichnet; in Folge davon wird die Bewegung eines Punktes der Gruppe einen gewissen Einfluss auf die Bewegung der anderen Punkte ausüben. Aber auch, wenn diese Kräfte Null sind, so dass die Massenpunkte gar nicht auf einander einwirken, kann man sie als eine Gruppe von Massenpunkten auffassen.

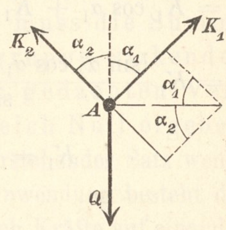
A. Gleichgewicht einer Massengruppe.

I. Satz der willkürlichen Verrückungen; Satz der virtuellen Verrückungen.

Man bezeichnet eine Massengruppe als im Gleichgewichte befindlich, wenn jeder ihrer Massenpunkte im Gleichgewicht ist, d. h. ruht, oder sich gleichförmig, geradlinig bewegt. Damit dies der Fall sei, müssen die an jedem Massenpunkte wirkenden Kräfte sich aufheben, d. h. eine Mittelkraft von der Grösse Null liefern.

Diese Mittelkraft Null verrichtet bei jeder Bewegung des Massenpunktes auch eine Arbeit von der Grösse Null. Da nun für einen Massenpunkt die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist (nach 1. Theil, S. 43), so muss, wenn die an einem Massenpunkte wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, die Arbeitssumme dieser Kräfte bei jeder Bewegung des Massenpunktes sich zu Null ergeben. Auch wenn der Massenpunkt in Wirklichkeit sich gar nicht bewegt, kann man, um aus der Nullsetzung der Arbeitssumme der an ihm wirkenden Kräfte die erforderlichen Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte abzuleiten, ihm irgend eine beliebige Bewegung ertheilt denken und kann diese gedachte Bewegung stets so wählen, wie es für die gerade gewünschte Bedingungsgleichung zweckmässig erscheint.

Fig. 120.



Befindet sich z. B. ein Massenpunkt in Ruhe unter Einwirkung eines gegebenen Gewichtes Q und zweier Kräfte K_1 und K_2, deren Grössen unbekannt sind, deren Richtungen aber mit der Lothrechten gegebene Winkel α_1 und α_2 bilden (Fig. 120), so kann man die Grössen der Kräfte K_1 und K_2 durch Nullsetzung der Arbeitssumme bei zwei beliebigen Bewegungen finden. Denkt man zunächst dem Massenpunkt eine wagerechte Bewegung AB ertheilt, so verrichtet die Schwerkraft Q dabei keine Arbeit (nach 1. Theil, S. 42/43), weil Q rechtwinklig zu AB ist. Die Wegeslänge AB giebt auf der Richtung von K_1 eine Projektion $AB \cdot \sin \alpha_1$, auf der Richtung von K_2 eine Projektion $-AB \cdot \sin \alpha_2$. Sonach liefert die Nullsetzung der Arbeitssumme

$$0 = K_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha_1 - K_2 \cdot AB \cdot \sin \alpha_2 \quad \text{oder}$$

1) $$0 = K_1 \cdot \sin \alpha_1 - K_2 \sin \alpha_2 .$$

Denkt man dagegen dem Massenpunkt eine lothrechte Bewegung AC ertheilt (Fig. 121), so verrichtet

$$\begin{array}{lll} Q & \text{die Arbeit} & -Q \cdot AC, \\ K_1 & \text{„} \quad \text{„} & K_1 \cdot AC \cdot \cos \alpha_1, \\ K_2 & \text{„} \quad \text{„} & K_2 \cdot AC \cdot \cos \alpha_2 . \end{array}$$

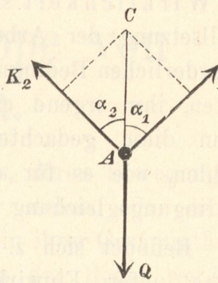
Sonach liefert die Nullsetzung der Arbeitssumme:

$$0 = -Q \cdot AC + K_1 \cdot AC \cdot \cos\alpha_1 + K_2 \cdot AC \cdot \cos\alpha_2 \quad \text{oder}$$

$$2) \qquad 0 = -Q + K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 .$$

Diese Gleichungen 1 und 2 sind offenbar nichts anderes als die im 1. Theil, S. 65 gegebene Regel: Es muss die Summe aller wagerechten Seitenkräfte Null sein und die Summe aller lothrechten Seitenkräfte ebenfalls. Nach Gl. 1 ist

Fig. 121.



$$K_2 = K_1 \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2};$$

setzt man dies in Gl. 2 ein, so wird

$$Q = K_1 \cos\alpha_1 + K_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cos\alpha_2$$

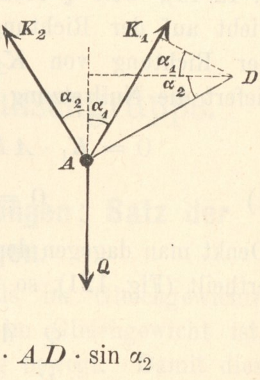
$$= K_1 \frac{(\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \sin\alpha_1)}{\sin\alpha_2} \quad \text{oder}$$

$$3) \qquad K_1 = Q \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad \text{ebenso wird}$$

$$4) \qquad K_2 = Q \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Diese gedachten Bewegungen AB und AC waren für die Berechnung von K_1 und K_2 nicht gerade sehr bequem, weil sie auf zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten führten. Man kann die gedachte Bewegung aber auch so einrichten, dass man für jede der Unbekannten nur je eine Gleichung bekommt. Wählt man die gedachte Bewegung AD rechtwinklig zu K_2 (Fig. 122), so verrichtet K_2 bei der Bewegung AD die Arbeit Null; AD liefert auf den Richtungen K_1 und Q die Projektionen $AD \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ bezw. $-AD \cdot \sin\alpha_2$. Die Nullsetzung der Arbeitssumme giebt:

Fig. 122.



$$0 = K_1 \cdot AD \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - Q \cdot AD \cdot \sin\alpha_2$$

und führt unmittelbar auf Gl. 3. Man kann also durch zweckmässige Wahl der gedachten Bewegung denselben Vortheil erreichen wie durch Anwendung der Momenten-Gleichung unter Benutzung eines auf der Richtungslinie von K_2 gelegenen Drehpunktes (vergl. 1. Theil, S. 160; 2. Theil, S. 73). Dieses Verfahren wird besonders dann werthvoll sein, wenn es sich gar nicht um die Entwickelung aller unbekannten Kräfte handelt, sondern z B. in dem Falle der Fig. 122 vielleicht nur K_1 ermittelt werden soll.

Wendet man dies nun auf eine Massengruppe an, so kann man jedem Punkte derselben beliebige Bewegungen ertheilt denken und die für jeden Punkt berechnete Arbeitssumme gleich Null setzen. Solche ganz willkürliche Lageänderungen nennt man Verrückungen. An jedem Punkte muss die Arbeitssumme von der Grösse Null sein, mithin auch die Arbeitssumme der ganzen Massengruppe. Daher hat man den **Satz der willkürlichen Verrückungen:** Ist eine Massengruppe im Gleichgewichte, so muss die Summe der von sämmtlichen an der Massengruppe wirkenden Kräften bei jeder willkürlichen oder gedachten Verrückung verichteten Arbeiten sich gleich Null ergeben.

In dieser allgemeinen Form freilich ist vorstehender Satz wenig verwendbar, denn in den meisten Fällen der Anwendung besteht die Massengruppe aus sehr vielen Punkten, die durch Kräfte auf einander wirken, so dass in der Arbeitssumme sehr viel Unbekannte auftreten würden. Die Kräfte lassen sich aber derartig in 2 Gruppen zerlegen, dass die Arbeitssumme der einen Gruppe unter gewissen Bedingungen ohne besondere Untersuchung gleich Null gesetzt werden kann, so dass man nur noch die Arbeitssumme der zweiten Gruppe aufzustellen braucht. In vielen Fällen nämlich sind die einzelnen Massenpunkte nicht ganz frei beweglich, sondern hinsichtlich ihrer Verrückbarkeit an bestimmte Bedingungen gebunden, die sich durch geometrische Gleichungen ausdrücken lassen. Jede Beschränkung der freien Beweglichkeit kann aber auch aufgefasst werden als Wirkung von Kräften, die genau so beschaffen sind, dass sie eine Abweichung von den beschränkenden Bedingungen verhindern. Diese Kräfte mögen Bedingungs- oder bedingte Kräfte genannt werden, während die übrigen Kräfte als unbedingte Kräfte bezeichnet werden sollen.

Bei einer ganz willkürlichen Verrückung der Massenpunkte, welche auf die beschränkenden Bedingungen keine Rücksicht nimmt, würden sowohl die bedingten, wie auch die unbedingten Kräfte

Arbeiten ergeben; ertheilt man aber der Massengruppe nur solche Verrückungen, welche mit den die freie Beweglichkeit beschränkenden Bedingungen verträglich sind, so liefern, wie sich zeigen lässst, die bedingten Kräfte für sich allein die Arbeitssumme Null, so dass man dann zur Prüfung des Gleichgewichtszustandes nur die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null zu setzen braucht. Solche mit gegebenen Bedingungsgleichungen verträgliche Bewegungen einer Massengruppe nennt man **virtuelle Verrückungen** (von virtus = Fähigkeit, Möglichkeit) und die dabei sich ergebenden Arbeiten der bedingten Kräfte **virtuelle Arbeiten.**

Die Beschränkungen der freien Beweglichkeit können verschiedener Art sein:

1. Es können einzelne Punkte unbeweglich, also feste Punkte sein. Sind x, y, z die Koordinaten eines solchen Punktes P, so sind die geometrischen Bedingungsgleichungen für die Unbeweglichkeit:

$$x = a; \quad y = b; \quad z = c,$$

worin a, b, c unveränderliche Grössen bedeuten sollen. Die entsprechende Bedingungskraft ist aber ein Widerstand W, der den Punkt P unbeweglich erhält. Virtuelle Verrückungen würden in diesem Falle solche sein, bei denen der Punkt P seine Lage nicht ändert; dann ergiebt aber auch die bedingte Kraft W keine Arbeit.

2. Es können einzelne Punkte gezwungen sein, auf gegebenen Flächen zu verbleiben. Für einen solchen Punkt wäre dann die Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = 0$ die Bedingungsgleichung, der Normalwiderstand N der Fläche die Bedingungskraft. Virtuelle Verrückungen wären solche, bei denen der betreffende Punkt längs der Fläche, d. h. rechtwinklig zu N bewegt wird, wobei (nach 1. Theil, S. 42/43) von N keine Arbeit verrichtet wird.

3. Es kann auch ein Theil der Punkte mit einander in starrer Verbindung sein. Die Bedingungsgleichungen sind dann von der Form

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = a^2,$$

wenn x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Koordinaten zweier Punkte und a eine unveränderliche Länge ist. Die Bedingungskräfte sind die inneren Kräfte des starren Körpertheiles, virtuelle Verrückungen solche, bei denen die starr verbundenen Punkte ihre gegenseitigen Abstände nicht ändern. Die virtuellen Arbeiten der bedingten Kräfte sind dann (nach 1. Theil, S. 144) Null. Auch bei einer Verbindung einzelner Massentheile durch Ketten, Fäden oder dergl. von unveränderlicher Länge sind die virtuellen Arbeiten Null, wenn die Ketten oder Fäden bei der Verrückung nicht schlaff werden.

Auch jeder beliebige Theil eines elastisch-festen oder flüssigen Körpers oder überhaupt einer beliebig veränderlichen Massengruppe kann, wenn er im Gleichgewicht ist, hinsichtlich der Bedingungen des Gleichgewichts wie ein starrer Körper, wie eine Gruppe von starr mit einander verbundenen Massenpunkten behandelt werden. Denn es muss die Arbeitssumme aller an dem betreffenden Theile wirkenden Kräfte (nach S. 153) bei jeder willkürlichen Verrückung Null sein. Als Verrückung kann man daher auch eine solche wählen, bei der die einzelnen Massenpunkte genau in ihrer gegenseitigen Lage verbleiben. D. h. man kann sich jeden beliebigen Theil einer im Gleichgewichte befindlichen Massengruppe, z. B. eines elastisch-festen oder flüssigen Körpers, zur Untersuchung der **Bedingungen** des Gleichgewichts erstarrt denken und auf ihn die Bedingungen des Gleichgewichts starrer Körper anwenden. Die inneren Kräfte der Massengruppe, also die Spannkräfte elastisch fester Körper, sowie die inneren Normalkräfte flüssiger Körper sind dann bedingte Kräfte und liefern (vergl. a. 2. Theil, S. 231) daher keine Arbeit.

Die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht starrer Körper (s. 1. Theil, S. 146) sind mittels des S. 157 folgenden Satzes der virtuellen Verrückungen sehr leicht zu finden. Die inneren Kräfte kommen dabei nicht in Frage. Sind K_1, K_2 .... die äusseren Kräfte, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 .... die Winkel derselben gegen drei rechtwinklig zu einander stehende Achsen, so ergiebt sich, wenn man dem Körper eine Parallelverschiebung parallel der x-Achse um dx ertheilt, die Arbeitssumme $\Sigma K \cdot \cos\alpha \,.\, dx = dx \Sigma K \cos\alpha$. Diese muss Null sein, mithin

1) $\Sigma K \cos\alpha = 0$; ebenso

2) $\Sigma K \cos\beta = 0$;

3) $\Sigma K \cos\gamma = 0$.

Ertheilt man nun dem Körper eine Drehung um die x-Achse mit dem Drehungswinkel $\omega \cdot dt$, so ist, wenn man mit $\mathfrak{M}_x$ die Summe der Momente der Kräfte K in Bezug auf die x-Achse bezeichnet und zugleich bedenkt, dass nach 1. Theil, S. 221 die Arbeit eines Kräftepaars gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel ist, die virtuelle Arbeit

$$0 = \mathfrak{M}_x \cdot \omega \cdot dt, \quad \text{mithin}$$

4) $$\mathfrak{M}_x = 0; \quad \text{ebenso}$$

5) $$\mathfrak{M}_y = 0;$$

6) $$\mathfrak{M}_z = 0.$$

4. Wenn die Theile eines Triebwerkes, Zahnräder (Fig. 123), Reibungsräder, Riemenscheiben (Fig. 124) u. dergl. derartig in einander greifen oder mit einander gekuppelt sind, dass sie an den Stellen des Eingriffes oder der Kuppelung Geschwindigkeiten von genau derselben Grösse haben müssen, so liegen in dem geometrischen Zusammenhange des Triebwerkes die Bedingungsgleichungen. Die bedingten Kräfte sind die durch den Eingriff oder die Kuppelung ausgeübten. Da diese auf die mit einander gekuppelten Maschinentheile gleich und entgegengesetzt wirken, ihre Angriffspunkte auch genau gleiche Geschwindigkeiten haben, so verrichten diese Kräfte bei jeder virtuellen, d. h. mit dem geometrischen Zusammenhange verträglichen Verrückung Arbeiten, die sich gegenseitig aufheben.

Fig. 123.

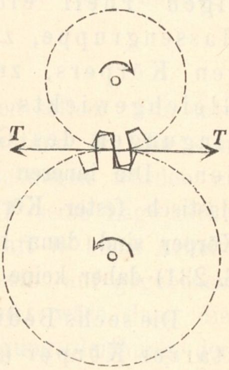
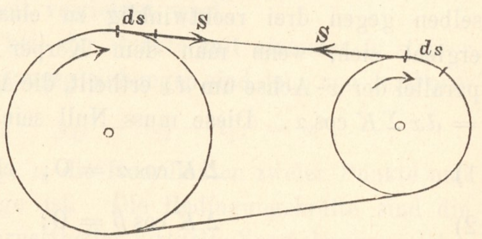


Fig. 124.



Unter einen dieser vier Hauptfälle ist jede Aufgabe zu bringen, bei welcher eine Massengruppe im Gleichgewicht ist und zugleich durch gewisse Bedingungsgleichungen in der freien Beweglichkeit der einzelnen Punkte beschränkt ist.

Da der Gleichgewichtszustand in manchen Fällen nur bei einer bestimmten Lage der Massengruppe besteht, also bei einer endlichen Verrückung gestört werden könnte, so darf man im Allgemeinen zur Ermittelung der Bedingungen des Gleichgewichts nur unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Hiernach lautet der **Satz der virtuellen Verrückungen:**

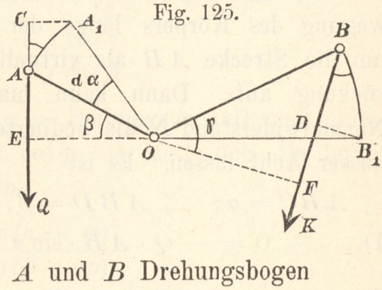
Befindet sich eine Massengruppe im Gleichgewichte, so ist für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null; die Arbeiten dieser unbedingten Kräfte bei virtuellen Verrückungen heissen virtuelle Arbeiten. Die Normalwiderstände einer vorgeschriebenen Fläche oder Linie, die Kräfte, welche Zahnräder auf einander ausüben, sind zwar bedingte Kräfte, die keine virtuellen Arbeiten liefern; dies gilt aber nicht von etwaigen Reibungswiderständen, die beim Gleiten unter Einwirkung dieser Kräfte entstehen und von ihnen abhängig sind. Die Reibungswiderstände verrichten auch bei virtuellen Verrückungen Arbeit und sind deshalb den unbedingten Kräften beizuzählen. Aus diesem Grunde eignet sich der Satz der virtuellen Verrückungen besonders für die Behandlung solcher Aufgaben, bei denen Reibungswiderstände nicht zu berücksichtigen sind, so dass dann auch die betreffenden Normaldrücke gar nicht ermittelt zu werden brauchen.

2. Anwendungen der Sätze der willkürlichen bezw. der virtuellen Verrückungen.

a) Hebel.

Es sei O (Fig. 125) die feste Drehachse des Hebels, A der Angriffspunkt der Last Q, B derjenige der bewegenden Kraft K. Drehachse und Gelenkbolzen seien reibungslos. Eine unendlich kleine virtuelle Verrückung besteht in einer unendlich kleinen Drehung des Hebels um die feste Achse O. Der Drehungswinkel sei $d\alpha$. Dann beschreiben A und B Drehungsbogen

Fig. 125.



$$\widehat{AA_1} = \overline{AO} \cdot d\alpha \quad \text{und} \quad \widehat{BB_1} = \overline{BO} \cdot d\alpha,$$

welche als geradlinig und rechtwinklig zu AO und BO angesehen werden können. Ist β der Winkel, den AO mit der Rechtwinkligen OE zu der Last Q bildet, so findet sich der gleiche Winkel β auch zwischen AA_1 und der Last Q, so dass die Projektion von AA_1 auf die Richtung von Q ist

$$AC = AA_1 \cos\beta = AO \cdot d\alpha \cdot \cos\beta = OE \cdot d\alpha.$$

Ebenso wird auf der rechten Seite

$$BD = BB_1 \cdot \cos\gamma = OB \cdot \cos\gamma \cdot d\alpha = OF \cdot d\alpha.$$

Der Widerstand der Drehachse O sowie die inneren Spannungen des als starr angenommenen Hebels sind bedingte Kräfte. Unbedingte Kräfte sind nur die Last Q und die treibende Kraft K; daher gilt nach dem Satze der virtuellen Verrückungen

$$0 = -Q \cdot AC + K \cdot BD, \quad \text{oder}$$

$$K \cdot OF \cdot d\alpha = Q \cdot OE \cdot d\alpha, \quad \text{d. h.}$$

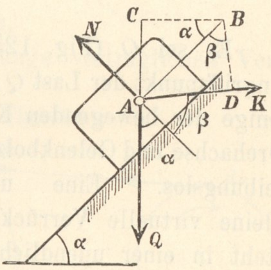
$$K \cdot OF = Q \cdot OE.$$

Dies ist nichts anderes als die Momentengleichung für den Hebel in Bezug auf seine Drehachse (s. 1. Theil, S. 151).

b) Schiefe Ebene.

Soll ein Körper vom Gewichte Q auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α durch eine Kraft K, welche mit der Normalen der Ebene den Winkel β einschliesst, gleichförmig aufwärts gezogen werden (Fig. 126) und soll dabei die Reibung zunächst unberücksichtigt bleiben, so fassen wir eine Gleitbewegung des Körpers längs der Ebene um die Strecke AB als virtuelle Verrückung auf. Dann kann man den Normalwiderstand N als bedingte Kraft ausser Acht lassen. Es ist

Fig. 126.



$\sphericalangle ABC = \alpha$; $\sphericalangle ABD = \beta$, somit

1) $$0 = -Q \cdot AB \cdot \sin\alpha + K \cdot AB \cdot \sin\beta, \quad \text{oder}$$

2) $$K = Q \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Diese Gleichung gilt auch für gleichförmige Abwärtsbewegung und auch für die Ruhe des Körpers.

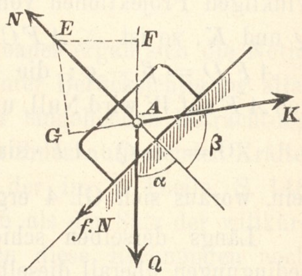
Soll aber die Reibung $f \cdot N$ mit berücksichtigt werden, etwa für die Aufwärtsbewegung, so ergiebt sich zunächst leicht wie Gl. 1:

$$0 = -Q \cdot AB \cdot \sin\alpha + K \cdot AB \cdot \sin\beta - fN \cdot AB, \quad \text{oder}$$

3) $$K \cdot \sin\beta = Q \cdot \sin\alpha + fN.$$

Nun aber muss man noch N finden, und dies ist mittels einer virtuellen Verrückung, d. h. einer solchen längs der Ebene, nicht möglich; man muss hierzu den allgemeinen Satz der willkürlichen Verrückungen (S. 153) anwenden. Wir ertheilen (Fig. 127) dem Körper eine Parallelverschiebung um die Strecke AE im Sinne von N und behandeln diese nur insofern als eine virtuelle Verrückung in beschränkter Form, indem wir den Körper als eine starre Massengruppe sich parallel verschieben lassen. N gehört nun zu den unbedingten Kräften. Der Verschiebungsweg AE giebt auf den Richtungen von Q, K und $f \cdot N$ die Projektionen: $AE \cdot \cos\alpha$; $AE \cdot \cos\beta$ und Null. Daher wird

Fig. 127.



$$0 = N \cdot AE - Q \cdot AE \cdot \cos\alpha - K \cdot AE \cdot \cos\beta, \quad \text{also}$$

$$N = Q \cdot \cos\alpha + K \cdot \cos\beta.$$

Setzt man dies in Gl. 3 ein, so ergiebt sich

$$K \sin\beta = Q \sin\alpha + fQ \cos\alpha + fK \cos\beta \quad \text{oder}$$

$$K = Q \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\beta - f\cos\beta}.$$

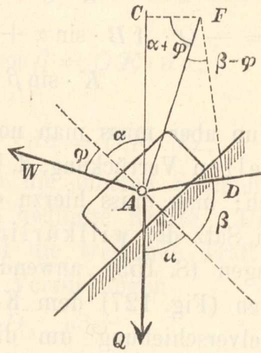
Vertauscht man noch f mit $\operatorname{tg}\varphi$ (φ = Reibungswinkel) und multiplicirt in Zähler und Nenner mit $\cos\varphi$, so lässt sich die letzte Gleichung leicht zusammenziehen in

4) $$K = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)}$$

(vergl. 1. Theil, S. 195, Gl. 6).

Allerdings kann man diese Gleichung auch unmittelbar erhalten, indem man für den zu betrachtenden Sinn der Gleitbewegung (in diesem Fall also nach aufwärts) die Richtung des Gesammtwiderstandes W der schiefen Ebene, d. h. der Mittelkraft aus N und $f \cdot N$, bestimmt, welche von N um den Reibungswinkel φ abweicht, und dem Körper dann eine Verschiebung AF, rechtwinklig zu W ertheilt (Fig. 128). Sind dann AC und AD die rechtwinkligen Projektionen von AF auf Q und K, so ist $\measuredangle AFC = \alpha + \varphi$, $\measuredangle AFD = \beta - \varphi$; die Projektion von AF auf W wird Null, und es muss

Fig. 128.

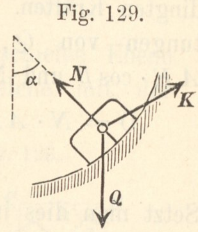


$$0 = -Q \cdot AF \cdot \sin(\alpha + \varphi) + K \cdot \overline{AF} \cdot \sin(\beta - \varphi)$$

sein, woraus sich Gl. 4 ergiebt.

Längs derselben schiefen Ebene bleiben die Gleichgewichtsbedingungen überall dieselben; daher war es in diesem Falle gleichgültig, ob die Verrückung endlich oder unendlich klein gewählt wurde. Sollte aber der Körper auf einer gekrümmten Fläche durch die Kraft K gehalten, oder langsam aufwärts bewegt oder auch langsam hinabgelassen werden (Fig. 129), so würde die Kraft K von dem Winkel α abhängig sein; daher muss man in diesem Fall unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Fig. 129.



Geschichtliches. Aus der Behandlung des Körpers auf schiefer Ebene ist leicht zu erkennen, dass die Benutzung des Satzes der virtuellen Verrückungen eigentlich nur für solche Fälle bequem ist, bei denen die Reibung nicht berücksichtigt werden soll. Dieses Ergebnis prägt sich auch in der Weise aus, wie der Satz in der Mechanik Anwendung gefunden hat. Er wurde nämlich für den Hebel, für Rollen und Flaschenzüge von Stevin (geb. 1548 zu Brügge, gest. 1620 zu Haag) als gültig erkannt, für die schiefe Ebene und den Keil 1655 von Galilei (geb. 18. Februar 1564 zu Pisa, gest. 8. Januar 1642 zu Arcetri). Joh. Bernoulli (geb. 1667 zu

Basel, gest. daselbst 1748) zeigte 1717, dass der allgemeine Satz der willkürlichen Verrückungen zur Lösung aller Aufgaben des Gleichgewichts benutzt werden könne, und Lagrange (geb. 1736 zu Turin, gest. 1813 zu Paris) hat ihn 1788 zu einer der Grundlagen seines Werkes über analytische Mechanik gemacht. Bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts berechnete man die Wirkung von Maschinen noch ohne eingehende Berücksichtigung der Reibung und konnte daher mit der Behandlung einer Maschine als Ganzes nach dem Satze der virtuellen Verrückungen sich begnügen. Die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper wurden von Poinsot (geb. 1774 zu Paris, gest. daselbst 1859) in der jetzt gebräuchlichen Form entwickelt.

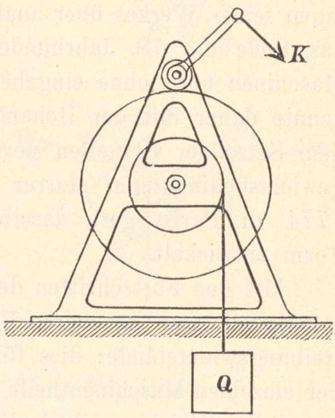
Mit den Fortschritten des Maschinenbaues ergab sich die Nothwendigkeit einer genaueren Berechnung unter Berücksichtigung aller Reibungswiderstände; dies führte zu einer eingehenden Betrachtung der einzelnen Maschinentheile und aller an ihnen auftretenden Kräfte, wozu die Gleichgewichtsbedingungen in der im 1. Theile, S. 146 mitgetheilten Form besser geeignet waren als der Satz der willkürlichen Verrückungen. Erleichtert wurden diese Rechnungen noch durch die Benutzung des Reibungswinkels (s. 1. Theil, S. 190), des Kraftecks und des Seilecks (s. 1. Theil, S. 118). Erneute Anwendung hat nun aber der Satz der virtuellen Verrückungen gefunden für die Berechnung der Fachwerke, u. zw. 1864 durch Clerk Maxwell (geb. 1830, gest. 1879) und im Jahre 1874 durch Mohr in Dresden (s. Keck, Elasticitätslehre, S. 207).

Da die Fachwerke als Verbindungen von Stäben mit reibungslosen Gelenken aufgefasst werden, so sind sie für die Anwendung des Satzes der virtuellen Verrückungen in hervorragender Weise geeignet (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 207, 250, 255).

c) Aufzugsmaschinen.

Bei der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde sind die einzelnen Theile des Triebwerkes derartig mit einander verkuppelt, dass irgend einer Geschwindigkeit v der Kurbel eine dadurch genau bestimmte Geschwindigkeit c der Last Q entspricht. Es ist $v:c$ das durch den geometrischen Zusammenhang bedingte Uebersetzungsverhältnis der Winde. Die Triebkraft K und die Last Q sind die einzigen unbedingten Kräfte, während alle anderen Kräfte, nämlich die inneren Spannungen der Kurbel, des Kurbelarmes und der übrigen Theile des Triebwerks und des Gestelles, die Widerstände der Achsen, die Kräfte zwischen den Zähnen zu den bedingten Kräften gehören. Unter Vernachlässigung der Reibungswiderstände wird dann für ein Zeittheilchen dt

Fig. 130.



$$0 = K \cdot v \cdot dt - Q \cdot c \cdot dt$$

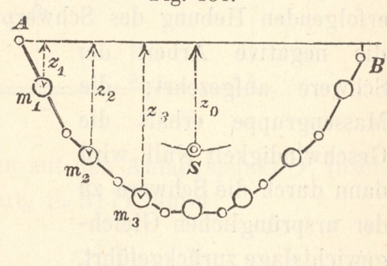
oder $Q : K = v : c$. Hierin liegt der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren" (s. 1. Theil, S. 215). Aus der hier benutzten Weise der Herleitung erkennt man, dass der Satz für alle einfachen Maschinen gelten muss, solange man die Reibungswiderstände vernachlässigt.

Ein Körper, der an einem Punkt oder einer Achse befestigt ist, kann im Gleichgewichtszustande sich nur befinden, indem er ruht; denn die Drehbewegung um den festen Punkt oder die feste Achse, welche die einzig möglichen Bewegungen sind, ertheilen den einzelnen Massenpunkten krummlinige Bewegungen, während das Gleichgewicht eines Massenpunktes durch Ruhe oder geradlinige, gleichförmige Bewegung bedingt ist. Ertheilt man aber der Kurbel der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde eine gleichmässige Drehbewegung, so wird, wie die vorstehende Entwickelung zeigt, die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null. Wollte man also den auf S. 157 ausgesprochenen Satz der virtuellen Verrückungen in der umgekehrten Fassung bringen: Eine Massengruppe befindet sich im Gleichgewichte, wenn für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null ist, so müsste noch hinzugefügt werden: unter der Voraussetzung, dass in der Massengruppe nicht etwa schon Winkelgeschwindigkeiten um feste Achsen oder Punkte bestehen. Denn der Umstand, dass die virtuelle Arbeit Null ist, schliesst nur **beschleunigte**, nicht aber gleichförmige Drehbewegungen aus. Eine gleichförmige Drehung hat auf die Beziehung zwischen den unbedingten Kräften keinen Einfluss, wenn man von der Reibung absieht. Durch eine solche Drehung werden in den umlaufenden Theilen besondere, von der Winkelgeschwindigkeit abhängende Spannungen (s. 2. Theil, S. 93) hervorgerufen; im Allgemeinen werden auch die Widerstände der festen Achsen dadurch beeinflusst; doch fällt der letztere Einfluss fort, wenn die Drehachsen **freie** Achsen sind (s. 1. Theil, S. 289). Die durch die Umlaufgeschwindigkeit erzeugten inneren Spannungen sind in sehr vielen Fällen, z. B. bei den durch Muskelkraft bewegten Aufzugsmaschinen, im Vergleiche mit den bei der Geschwindigkeit Null auftretenden Spannungen verschwindend klein; daher man auf den Unterschied zwischen gleichförmiger Drehbewegung und Ruhezustand meist **gar** keine Rücksicht nimmt. Bei Körpern mit grosser Umlaufgeschwindigkeit, z. B. Schwungrädern, Mühlsteinen (s. 2. Theil, S. 96), Schleudermaschinen (s. 2. Theil, S. 201) haben diese Spannungen aber mafsgebende Bedeutung.

d) Gelenkstangen-Verbindungen.

A und B (Fig. 131) seien die Aufhängegelenke einer Gelenkstangen-Verbindung. Die einzelnen Stäbe seien starr und durch reibungslose Gelenke mit einander verbunden. Das Gewicht jedes Stabes sei zu einem Massenpunkt m vereinigt gedacht. Diese Massen m_1, m_2, m_3 . . . mögen um z_1, z_2, z_3 . . . unter einer festen wagerechten Ebene liegen; es soll eine Beziehung für die Ruhelage der Stangenverbindung gesucht werden.

Fig. 131.



Wird der Stangenverbindung eine unendlich kleine virtuelle Verrückung aus der Ruhelage ertheilt, so sind die inneren Spannkräfte der Stäbe, die Widerstände der Widerlagergelenke, die gegenseitigen Kräfte in den Zwischengelenken durchweg bedingte Kräfte; virtuelle Arbeiten werden nur von den Gewichten $m_1 g$, $m_2 g$ . . . .

verrichtet. Erfährt nun eine der Massen m bei der unendlich kleinen Verrückung eine Senkung um dz, so ist die entsprechende virtuelle Arbeit $mg \cdot dz$, und es muss, von der Ruhelage aus gerechnet,

$$0 = \Sigma(mg \cdot dz) = g\left\{m_1 \cdot dz_1 + m_2 \cdot dz_2 + \ldots\right\} \text{ sein.}$$

Dafür kann man, weil die Massen unveränderlich sind, auch schreiben

$$0 = g \cdot d(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots).$$

Hat der Schwerpunkt S der Massen m in der Ruhelage eine Tiefe z_0 unter der festen wagerechten Ebene, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\Sigma m \cdot z = M \cdot z_0$$

(s. 1. Theil, S. 139), wenn $M = \Sigma m$ die Gesammtmasse bedeutet. Daher wird

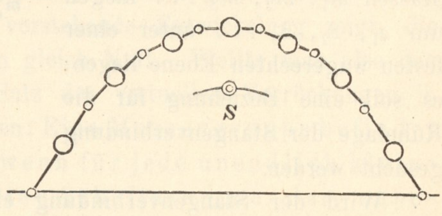
$$0 = d(M \cdot z_0) = M \cdot dz_0 \quad \text{oder} \quad dz_0 = 0$$

die Bedingung für die Ruhelage der Gelenkstangen-Verbindung.

Bei einer unendlich kleinen virtuellen Verrückung darf der Schwerpunkt der gesammten Masse sich weder heben noch senken, d. h. er muss in der Ruhelage entweder möglichst tief oder möglichst hoch liegen.

Befindet sich der Schwerpunkt S in der Ruhelage so tief wie möglich, so wird einer endlichen virtuellen Verrückung eine Bahnlinie des Schwerpunktes entsprechen, wie in Fig. 131 angedeutet. Erfolgt die Verrückung aus der Gleichgewichtslage etwa durch einen leichten seitlichen Stoss, welcher der Massengruppe ein gewisses Arbeitsvermögen ertheilt, so wird dieses bei der nunmehr erfolgenden Hebung des Schwerpunktes aus der tiefsten Lage durch die negative Arbeit der Schwere aufgezehrt; die Massengruppe erhält die Geschwindigkeit Null, wird dann durch die Schwere zu der ursprünglichen Gleichgewichtslage zurückgeführt, führt um diese Schwingungen aus und kommt, nachdem letztere durch Widerstände vernichtet sind, schliesslich in der sicheren (stabilen) Gleichgewichtslage zur Ruhe. Lag der Schwerpunkt aber im Gleichgewichtszustande so hoch wie möglich (Fig. 132), so wird der,

Fig. 132.

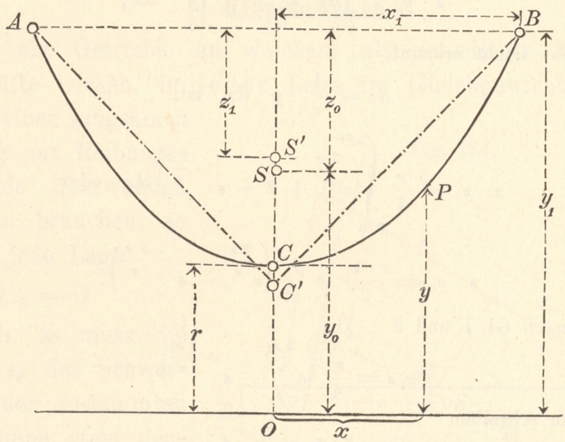


einem kleinen Anstofse folgenden Senkung des Schwerpunktes eine positive Arbeit der Schwere entsprechen, d. h. die Massengruppe wird sich beschleunigt immer weiter aus der ursprünglichen Ruhelage entfernen und erst in einer neuen sicheren Gleichgewichtslage mit tief liegendem Schwerpunkte zur Ruhe gelangen.

Die tiefste Lage des Schwerpunktes entspricht also der natürlichen sicheren Gleichgewichtsform, die höchste Lage der künstlichen, unsicheren (labilen) Gleichgewichtsform. Bei unendlich vielen Stangen geht die erstere Form in die Kettenlinie, die zweite Form in die Drucklinie über (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 315).

Die Gleichgewichtsform einer Kette, die der Bogenlänge nach geichmässig belastet wird, ist die gemeine Kettenlinie

Fig. 133.



(Fig. 133), deren Gleichung, bezogen auf den Anfangspunkt O, (nach Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 317) lautet:

1) $$y = {}^1/_2\, r \left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right).$$

Darin bedeutet r den Krümmungshalbmesser im Scheitel C. Da dem sicheren Gleichgewichtszustande die möglichst tiefe Lage des Schwerpunktes entspricht, so kann man auch aus dieser Bedingung die Gleichung der gemeinen Kettenlinie finden, indem man die

Frage stellt: Nach welcher Kurve muss eine bei A und B befestigte Kette von gegebener Länge geformt sein, damit ihr Schwerpunkt so tief wie möglich liege. Die Lösung dieser Aufgabe mit Hülfe der Variationsrechnung führt thatsächlich auf die Gleichung 1. Diese Behandlung überschreitet den Rahmen unseres Buches; doch möge der Nachweis geführt werden, dass, wenn man die im Gleichgewichte befindliche Kette ACB bei C lothrecht abwärts zieht und dadurch (annähernd) in die geknickte Form $AC'B$ überführt, der Gesammtschwerpunkt sich von S nach S' hebt.

Hat der Aufhängepunkt B die Koordinaten x_1 und y_1, so findet man die Bogenlänge $CB = s$ leicht zu

2) $$s = \tfrac{1}{2} r \left(e^{\frac{x_1}{r}} - e^{-\frac{x_1}{r}}\right).$$

Für die Höhe des Schwerpunktes S der Kettenlinie $ACB = 2s$ über O gilt dann, wenn man den Faktor 2 beiderseits fortlässt:

$$s \cdot y_0 = \int_0^{x_1} ds \cdot y = \frac{1}{r} \int_0^{x_1} y^2 \cdot dx,$$

weil, wie man leicht erkennt,

$$ds = \frac{1}{r} \cdot y \cdot dx \quad \text{ist.}$$

Dann wird $$s \cdot y_0 = \frac{r}{4} \int_0^{x_1} \left(e^{\frac{2x}{r}} + 2 + e^{-\frac{2x}{r}}\right) dx \quad \text{oder}$$

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{r^2}{8} \left(e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}}\right).$$

Weil aber nach Gl. 1 und 2

$$y_1 s = \frac{r^2}{4} \left(e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}}\right),$$

so kann man schreiben

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{y_1 \cdot s}{2}; \quad \text{mithin}$$

$$y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2s} + \frac{y_1}{2},$$

oder für die Tiefe des Schwerpunktes S unter der Sehne AB:

$$z_0 = y_1 - y_0 = \frac{y_1}{2} - \frac{r \cdot x_1}{2s}.$$

Wird die Kette vor der Länge $2s$, aber in die Form $AC'B$ gebracht, so ist $AC' = s$ und die Tiefe des Schwerpunktes unter AB

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - x_1^2}.$$

Es ist zu beweisen, dass $z_0 > z_1$, oder $z_0^2 > z_1^2$; zu dem Ende setzen wir $z_0^2 - z_1^2 = U$ und untersuchen, ob $U > 0$ ist. Es wird

$$U = \frac{1}{4}\left\{y_1^2 - \frac{2\,y_1 r \cdot x_1}{s} + \frac{r^2 \cdot x_1^2}{s^2} - s^2 + x_1^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x_1^2\left(\frac{r^2 + s^2}{s^2}\right) - \frac{2\,y_1 r \cdot x_1}{s} + y_1^2 - s^2\right\}.$$

Nach den Gl. 1 und 2 findet man leicht

$$r^2 + s^2 = y_1^2;\quad y_1^2 - s^2 = r^2,\quad \text{so dass}$$

$$U = \frac{1}{4}\left\{\frac{x_1^2 \cdot y_1^2}{s^2} - \frac{2\,x_1 y_1 r}{s} + r^2\right\};$$

da dies ein Quadrat ist, nämlich

$$U = \left(\frac{1}{2}\left[\frac{x_1 y_1}{s} - r\right]\right)^2,$$

so ist $U > 0$, also bewiesen, dass $z_0 > z_1$, dass also beim Geradestrecken der Schwerpunkt sich wirklich gehoben hat.

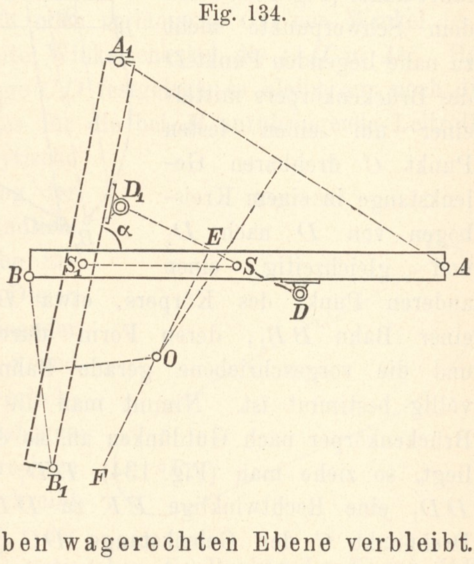
e) Klappbrücken.

Soll ein Getriebe, an welchem als unbedingte Kräfte nur Schwerkräfte wirken, in jeder Lage im Gleichgewichte sein, so dass bei einer langsamen Bewegung nur Reibungswiderstände überwunden zu werden brauchen, so muss für jede Lage

$$dz_0 = 0$$

sein, d. h. es muss die Ordinate z_0 des Schwerpunktes der gesammten Massengruppe stets denselben Werth behalten. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Gesammtschwerpunkt sich bei einer virtuellen Verrückung entweder gar nicht bewegt, oder doch stets in derselben wagerechten Ebene verbleibt.

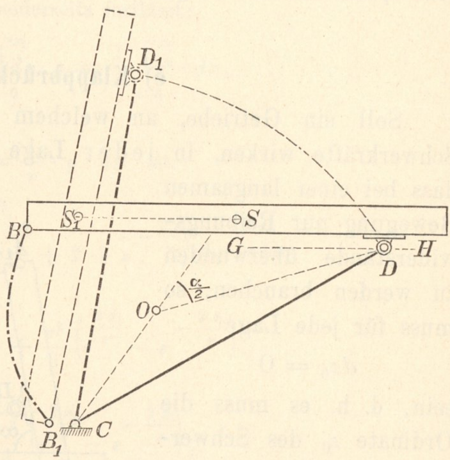
Fig. 134.



Derartige Erwägungen finden Anwendung beim Entwerfen grösserer Klappbrücken. Soll etwa (Fig. 134) der Brückenkörper

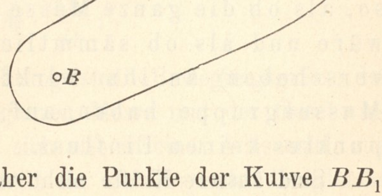
AB in die Lage $A_1 B_1$ gebracht werden, so ist dies nach S. 13 am einfachsten durch Drehung um den Punkt O zu erreichen, den man findet, indem man $\overline{AA_1}$ zieht und in der Mitte derselben eine Winkelrechte errichtet, ebenso B mit B_1 verbindet und in der Mitte von BB_1 eine Normale zu BB_1 zeichnet; dann ist O der Schnittpunkt der beiden Normalen. Bei einer Drehung um O würde aber jeder Punkt, also auch der Schwerpunkt S des Brückenkörpers einen Kreisbogen beschreiben, so dass hierdurch die gestellte Bedingung nicht erfüllt wird. Soll die Bewegung nun so geregelt werden, dass der Schwerpunkt eine Wagerechte beschreibt, so könnte man zunächst auf den Gedanken kommen, den Schwerpunkt unmittelbar längs einer Gleitbahn SS_1 zu führen. Diese Lösung ist aber nicht brauchbar, weil der rechts von der aufgerichteten Klappe befindliche Raum von festen Theilen grösstentheils frei bleiben soll, um Schiffen die Durchfahrt zu gestatten. Man führt daher (Fig. 135) einen dem Schwerpunkte nicht zu nahe liegenden Punkt D des Brückenkörpers mittels einer um einen festen Punkt C drehbaren Gelenkstange in einem Kreisbogen von D nach D_1 und gleichzeitig einen anderen Punkt des Körpers, etwa B, mittels einer Rolle in einer Bahn BB_1, deren Form durch den Kreisbogen DD_1 und die vorgeschriebene gerade Bahn SS_1 des Schwerpunktes völlig bestimmt ist. Nimmt man die Lage des Punktes D am Brückenkörper nach Gutdünken an, so dass dadurch auch D_1 festliegt, so ziehe man (Fig. 134) DD_1 und in der Mitte E von DD_1 eine Rechtwinklige EF zu DD_1. Dann muss der feste Drehpunkt C der Gelenkstange DC jedenfalls auf EF liegen. Da bei einer Drehung des Brückenkörpers um O (Fig. 134) D auch nach D_1 gelangen würde, so muss die Gerade EF auch den

Fig. 135.



Punkte O enthalten. Auf EF kann der Drehpunkt C beliebig gewählt werden. Da aber die Gelenkstange CD in dem geöffneten Zustande der Brücke eine Lage CD_1 (Fig. 135) haben muss, welche den Raum für die freie Durchfahrt nicht beengt, da es ferner für die feste Lagerung des Drehpunktes C erwünscht sein wird, denselben etwa in gleicher Tiefe mit B_1 anzuordnen, so wird die Gerade EF (Fig. 134) vielleicht einen zweckmässig liegenden Drehpunkt C nicht enthalten, so dass also die willkürliche Annahme des Punktes D nicht glücklich war. Man kann dann auch umgekehrt den Drehpunkt C an passend erscheinender Stelle annehmen, für den Angriffspunkt D der Gelenkstange aber vielleicht nur eine gewisse Tiefe, d. h. einen gewissen Abstand von der Brückentafel, gegeben durch eine Gerade GH (Fig. 135), festsetzen und nun die Lage des Angriffspunktes D in der Geraden GH durch Zeichnung in folgender Weise finden. Eine Gerade CO bestimmt diejenige Linie, welche in Fig. 134 EF genannt wurde. Ist nun α der gesammte Winkel, um den die Brückentafel gedreht werden soll, so ist α zugleich der gemeinschaftliche Centriwinkel aller Kreisbögen, die bei einer Drehung um O von sämmtlichen Theilen der Brückenbahn, also auch von D, beschrieben werden würden. Trägt man im Punkte O an die nach oben verlängerte CO den Winkel $^1/_2\,\alpha$ an, so schneidet der zweite Winkelschenkel die GH in D. Hat man somit die Gelenkstange CD festgelegt, so bleibt nur noch die Form des Führungsschlitzes für die bei B anzubringende Leitrolle zu bestimmen. Eine analytische Entwickelung der Gleichung der Bahnlinie BB_1 ist so umständlich, dass man die zeichnerische Ermittelung vorziehen wird. Die in der Brückentafel gegen einander fest liegenden Punkte D, S und B (Fig. 135) bilden ein Dreieck; lässt man D auf dem Kreisbogen DD_1, S auf der Wagerechten SS_1 sich bewegen, so beschreibt B die Bahnlinie BB_1 der Führungsrolle. Man bestimmt daher die Punkte der Kurve BB_1 am bequemsten und sichersten, indem man das Dreieck DSB

Fig. 136.



auf Pauspapier zeichnet oder aus starkem Kartenpapier so ausschneidet (Fig. 136), dass man D und S auf DD_1 bezw. SS_1 verschiedene Lagen geben und bei B jedesmal einen Zirkelstich machen kann.

B. Bewegung einer Massengruppe.

I. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes; Satz vom Antriebe.

Schon im 1. Theil, S. 141 wurden die Gleichungen abgeleitet:

$$1)\qquad \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Darin bedeuteten x, y und z die augenblicklichen Koordinaten eines Massenpunktes m,

$$X = \Sigma K \cos\alpha, \quad Y = \Sigma K \cos\beta, \quad Z = \Sigma K \cos\gamma$$

die Summe der in den einzelnen Achsenrichtungen auftretenden Seitenkräfte der äusseren Kräfte K. Daraus folgten nach der Lehre vom Schwerpunkte die Gleichungen

$$2)\qquad \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{X}{M}; \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{Y}{M}; \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{Z}{M},$$

worin x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes der Massengruppe bezeichnen, deren Gesammtmasse M ist. Diese Gleichungen 2 enthielten den Satz:

Der Schwerpunkt einer Massengruppe bewegt sich so, als ob die ganze Masse der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämmtliche äussere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte der Massengruppe haben auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss.

Sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so kann der Schwerpunkt der Massengruppe sich nur geradlinig und gleichförmig bewegen.