Halbmesser des Rohres, ϑ der Winkel zwischen dem Drehungshalbmesser $OA = x$ und der Normalen zum Rohre. Dann ist N wie S. 136 die einzige wirklich vorhandene Kraft in der Drehungsebene. Die erste Ergänzungskraft ist die Centrifugalkraft $m \cdot x \cdot \omega^2$, die zweite ist aus denselben Gründen wie im vorigen Beispiele $= 2m \cdot w \cdot \omega$, normal zu AB gerichtet mit dem Sinne nach rechts. Bei der scheinbaren Bewegung ist wieder die Centrifugalkraft die einzige, welche Arbeit verrichtet; daher

$$\frac{mw^2}{2} - \frac{mw_1^2}{2} = m \cdot \omega^2 \int_{r_1}^{x} x \cdot dx = \frac{m \cdot \omega^2}{2}(x^2 - r_1^2), \quad \text{also}$$

$$1) \qquad w^2 = w_1^2 + \omega^2 (x^2 - r_1^2).$$

Hierdurch ist w für jede Stelle des Rohres bestimmt. Da die scheinbare Bewegung krummlinig erfolgt, so ist die Centripetal-Beschleunigung

$$\frac{w^2}{\varrho} = \frac{N + 2m \cdot w \cdot \omega - m \cdot x \cdot \omega^2 \cos\vartheta}{m}, \quad \text{also}$$

$$2) \qquad N = m\left\{\frac{w^2}{\varrho} + x \cdot \omega^2 \cos\vartheta - 2w \cdot \omega\right\};$$

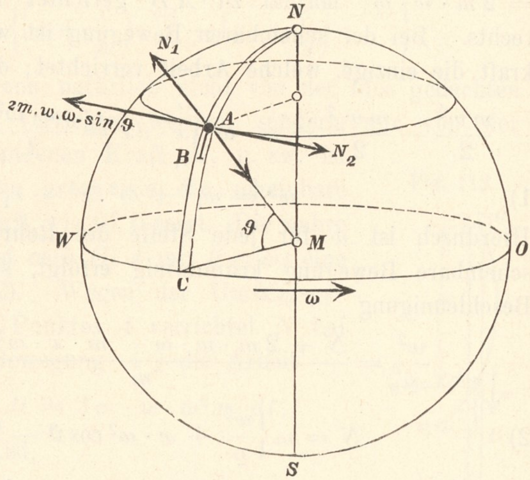
sind ϱ und ϑ für jede Stelle des Rohres bekannt, so ist mit Hülfe von Gl. 1 auch N überall bestimmt.

Bei den Radial-Turbinen bewegen sich die Wassertheilchen an Schaufeln entlang, die etwa die Form $CABD$ haben, und üben dabei nach dem Gesetze der Wechselwirkung auf die Schaufel eine der Kraft N entgegengesetzte Druckkraft aus, welche eben die Triebkraft für das Rad bildet und daher an jeder Stelle positiv sein soll. Dagegen würde $N = 0$ die Bedingung sein für die Form derjenigen scheinbaren Bahnlinie, welche der Massenpunkt ohne Einwirkung wahrer Kräfte auf der sich drehenden Scheibe beschreiben würde. Die wahre Bahnlinie ist in diesem Falle eine Gerade.

3. Vorgeschriebene Bewegung längs eines Meridians der sich drehenden Erde.

Ein Massenpunkt m werde auf der nördlichen Halbkugel der Erde mit der Geschwindigkeit w längs eines Meridianes im Sinne von Norden nach dem Äquator bewegt; dann wird ausser der Anziehungskraft der Erde noch der Widerstand der Bahnlinie wirken, welcher sich in eine Seitenkraft N_1 in der Meridianebene und in eine Seitenkraft N_2 rechtwinklig zur Meridianebene und tangential zum Parallelkreise des augenblicklichen Ortes A (Fig. 114) zerlegen lässt. Um N_1 und N_2, besonders die letztere, leicht bestimmen zu können, denkt man sich die Drehung der Erde weg und dafür die beiden Ergänzungskräfte angebracht. Die erste Ergänzungskraft ist die dem augenblicklichen Ort A entsprechende Centrifugalkraft; sie kann unberücksichtigt bleiben, wenn man als Schwere sogleich die scheinbare Schwere $m \cdot g_\vartheta$ nach 1. Theil, S. 93, die wir allein wahrnehmen und messen können, einführt und welche schon die Mittelkraft aus der wahren Schwere und der Centrifugalkraft wegen der Erddrehung darstellt. Die Richtung dieser scheinbaren Schwere fällt mit der Richtung des Lothes zusammen.

Fig. 114.



Schneidet der Meridian den Äquator in C und ist M der Mittelpunkt der Erde, so bezeichnet der Winkel $AMC = \vartheta$ die geographische Breite des Ortes A. Legt man durch A eine Drehachse parallel der Erdachse, so bildet diese mit dem Bahntheilchen AB ebenfalls den Winkel ϑ, weil die Erdachse zu CM rechtwinklig ist. Dreht man das Bahntheilchen AB um die durch A gelegte Achse im Sinne der Erddrehung, d. h. von West nach Ost, so bewegt sich dadurch B in seinem Parallelkreise nach Osten; die zweite Ergänzungskraft ist daher eine tangential zum Parallelkreise liegende Kraft von der Grösse $2 \cdot m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta$ mit dem

Sinne nach Westen. Da nun der Massenpunkt bei seiner scheinbaren Bewegung die Meridianebene nicht verlässt, so müssen sich die rechtwinklig zu dieser Ebene wirkenden Kräfte aufheben, d. h. es muss die zweite Ergänzungskraft durch einen eben so grossen Gegendruck

1) $$\boldsymbol{N_2 = 2 \cdot m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta}$$

aufgehoben werden. Diesen Seitendruck muss die westliche Seitenwand der vorgeschriebenen Bahn leisten.

In der Meridianebene führt der Punkt eine gleichförmige Kreisbewegung aus, wenn man die Abweichung der Erdform von einer Kugel nicht beachtet. Ist r der Erdhalbmesser, so entspricht dieser Kreisbewegung eine Centripetalbeschleunigung $w^2 : r$, welche von der Centripetalkraft $mg_\vartheta - N_1$ erzeugt werden muss. Sonach ist

2) $$N_1 = mg_\vartheta - \frac{mw^2}{r}.$$

N_1 ist der Widerstand des Erdbodens, also, lothrecht nach unten genommen, der Druck, den der Massenpunkt auf den Erdboden ausübt. Derselbe vermindert sich nach Gl. 2 mit zunehmender Geschwindigkeit w. Er wird zu Null für

2) $$w = \sqrt{g_\vartheta \cdot r} = 7905\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}.$$

(s. S. 57 und 104), wenn man $g_\vartheta = 9{,}81$ und $r = 6\,370\,000^{\mathrm{m}}$ einführt (s. 1. Theil, S. 94). Für Geschwindigkeiten, wie sie im menschlichen Verkehr auf fester Bahn vorkommen, z. B. auf Eisenbahnen, ist genau genug $N_1 = mg_\vartheta$ wie im Ruhezustande.

Blickt man im Sinne der Bewegung die Bahn entlang, so ist bei der Bewegung von Norden nach dem Äquator die westliche Seitenwand der Bahn, die den Druck N_2 zu leisten hat, die rechtsseitige. Der Massenpunkt übt also bei der Bewegung einen wagerechten Seitendruck nach rechts aus und äussert dadurch das Bestreben nach rechts von der Bahn abzuweichen. Erfolgt die Bewegung umgekehrt vom Äquator nach Norden hin, so vertauschen die beiden Nachbarpunkte A und B des Bahntheilchens ihre Rollen, ähnlich wie in dem Beispiele S. 41—43; der Endpunkt des Bahntheilchens bewegt sich dann, wenn man das Theilchen um eine durch den Anfangspunkt gelegte Achse übereinstimmend mit der Erde sich drehen lässt, nach Westen; daher erhält die zweite Ergänzungskraft einen Sinn nach Osten, der Seitendruck N_2 einen solchen nach

Westen. Diese muss von der östlichen Seitenwand ausgeübt werden; das ist für den nunmehrigen Sinn der Bewegung des Punktes wiederum die rechtsseitige Wand.

In gleicher Weise findet man, dass ein Massenpunkt, der auf der südlichen Halbkugel längs des Meridians bewegt wird, sich stets gegen die linke Seitenwand presst.

Die Druckkraft ist nach Gl. 1 verhältnisgleich mit der Geschwindigkeit w und dem Sinus der geographischen Breite, ist also am Äquator Null, am Pol am grössten.

Nach 1. Theil, S. 92 ist

$$\omega = 2\pi : 86\,164 = 0{,}000\,073.$$

Für Hannover ist

$$\vartheta = 52^0\,23', \quad \sin\vartheta = 0{,}7921, \quad \omega \cdot \sin\vartheta = 0{,}000\,057\,8,$$

$$\frac{N_2}{mg} = \frac{2 \cdot w \cdot 0{,}000\,057\,8}{9{,}81} = 0{,}000\,011\,78\,w.$$

Hiernach übt auf der nördlichen Halbkugel ein mit $20^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ Geschwindigkeit längs des Meridians fahrender Eisenbahnzug von $150\,000^{\mathrm{kg}}$ Gewicht eine wagerechte Druckkraft gegen die rechtsseitige Schiene aus von

$$N_2 = 150\,000 \cdot 0{,}000\,011\,78 \cdot 20 = 35{,}3^{\mathrm{kg}}.$$

Auf einer zweigleisigen Bahn, wo jedes Gleis stets in derselben Fahrrichtung benutzt wird, also stets dieselbe Schiene den Seitendruck N_2 empfängt, würde man trotz der Kleinheit von N_2 im Verhältnis zu mg vielleicht auf den Gedanken kommen können, der Gefahr einer seitlichen Verschiebung des Gleises oder gar einer Entgleisung nach rechts durch eine Überhöhung der rechtsseitigen Schiene vorzubeugen, wie man in Eisenbahnkurven die äussere Schiene überhöht (s. 1. Theil, S. 71). Für den Winkel α, um den die Querlinie des Gleises gegen die Wagerechte gedreht werden müsste, gilt

$$\alpha = \frac{N_2}{mg} = \frac{35{,}3}{150\,000} = 0{,}000\,235\,6, \tag{2}$$

was bei 1500^{mm} Schienenentfernung einer Überhöhung der rechtsseitigen Schiene um $0{,}35^{\mathrm{mm}}$ entspricht. Eine so geringe Überhöhung hat aber praktisch weder Sinn noch Zweck. Da in einer Kurve vom Halbmesser ϱ für den Winkel α gilt (1. Theil, S. 71)

$$\alpha = \frac{w^2}{g\varrho},$$

so würde obiger Werth von α bei $w = 20^m/_s$. einem Krümmungshalbmesser $\varrho = 173\,100^m$ entsprechen.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit w längs des Meridians in Bewegung gesetzt, ist aber eine vorgeschriebene Bahn, welche die Druckkraft ausüben könnte, nicht vorhanden, so wird er mit einer der zweiten Ergänzungskraft entsprechenden Beschleunigung $2w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta$ vom Meridiane nach rechts hin abweichen. Bleibt diese Beschleunigung während der Zeit t unverändert, so erfährt der Punkt eine seitliche Abweichung

3) $$z = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t^2 = l \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t,$$

wenn man $w \cdot t$ mit l vertauscht. Diese Abweichung kommt z. B. in Frage, wenn ein Massenpunkt in der Richtung des Meridians geworfen wird. Darin bedeutet w die mittlere wagerechte Seitengeschwindigkeit.

In dem Beispiel auf S. 111 wurde die Wurfweite von 8460^m in $19{,}14^s$. zurückgelegt. Die hiernach berechnete rechtsseitige Abweichung ergiebt sich zu

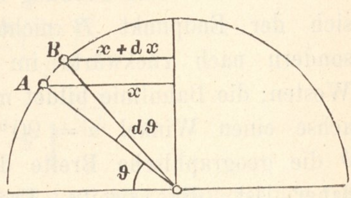
$$z = 8460 \cdot 0{,}000\,057\,8 \cdot 19{,}14 = 9{,}36^m,$$

wenn das Geschütz in der Richtung des Meridians in der geographischen Breite Hannovers abgefeuert wird.

Unmittelbare Berechnung der seitlichen Abweichung.

Die Beseitigung der Bewegung des Raumes, in welchem die scheinbare Bewegung erfolgt, und die Ersetzung derselben durch die Ergänzungskräfte ist zwar für die Beantwortung mancher Frage sehr vortheilhaft, verdunkelt aber den wirklichen Vorgang; es ist deshalb nützlich, in geeigneten Fällen die scheinbare Bewegung auch durch Betrachtung der wirklichen Bewegungsverhältnisse zu untersuchen. Solches möge hier hinsichtlich der seitlichen Abweichung nach rechts (auf der nördlichen Halbkugel) geschehen.

Fig. 115.



Bei dem Übergange des Massenpunktes von A nach B (Fig. 115) ändert sich der Drehungshalbmesser von x auf $x + dx$, d. h. von $r \cos\vartheta$ auf $r(\cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot d\vartheta)$. Der Punkt A der Erdoberfläche hat die Umdrehungsgeschwindigkeit $x \cdot \omega$, der Punkt B aber die um $r \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$ kleinere. Der von A nach B kommende Massenpunkt bringt nun ausser der scheinbaren Geschwindigkeit w längs des Meridianes die Drehungsgeschwindigkeit $x \cdot \omega = r \cdot \omega \cdot \cos\vartheta$ längs des Parallelkreises mit und ist nun, nachdem er in B angelangt, der hier langsamer sich bewegenden Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit $r \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$ nach Osten vorausgeeilt. Dem entspricht in der Zeit dt eine östliche Voreilung um

$$dz = r \cdot \omega \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot dt,$$

oder, weil $r \cdot d\vartheta = AB = w \cdot dt$ ist, um $dz = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot dt^2$, also für kleine endliche Bewegungen in kurzem Zeitraume t um

$$z = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t^2,$$

oder auch, wenn man die Wegeslänge $AB = w \cdot t = l$ setzt:

$$z = l \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t,$$

übereinstimmend mit Gl. 3.

4. Vorgeschriebene Bewegung längs einer lothrechten Bahn auf der sich drehenden Erde.

In einem lothrechten Rohre AB (Fig. 116) von der Höhe h falle ein Massenpunkt; dann ist zunächst die Schwere eine der wirklichen Kräfte. Von den Ergänzungskräften ist die erste schon berücksichtigt, wenn man mit der scheinbaren Schwere rechnet. Legt man nun durch A eine zur Erdachse SN parallele Achse und ertheilt der Bahn AB eine Drehung ω, so bewegt sich der Endpunkt B nicht nach vorn, sondern nach rückwärts im Sinne nach Westen; die Bahnlinie bildet mit der Drehachse einen Winkel $\alpha = 90^0 - \vartheta$, wenn ϑ die geographische Breite des Ortes A; daher ist die zweite Ergänzungskraft $2m \cdot w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta$, u. zw. mit dem Sinne nach Osten, und da

Fig. 116.