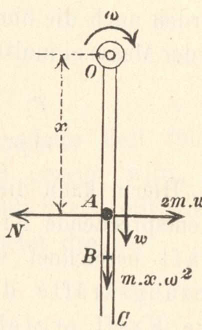
I. Bewegung eines Massenpunktes in einem geraden, sich gleichförmig drehenden Rohre ohne Reibung.

Die Drehung des Rohres OC (Fig. 111) erfolge mit der gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit ω (rechts herum) um eine das Rohr rechtwinklig schneidende Achse O. Der Massenpunkt befinde sich im Zeitpunkte t bei A im Abstand x von O und habe in Bezug auf das Rohr eine Geschwindigkeit w mit dem Sinne nach aussen. Die Schwere mg werde vernachlässigt oder stehe rechtwinklig zur Bildebene, so dass sie durch einen gleichen Gegendruck des Rohres aufgehoben wird; es sollen nur die in der Bildebene auftretenden Bewegungen und Kräfte betrachtet werden. Dann ist der in der Bildebene wirkende Normaldruck N des Rohres die einzige an dem Massenpunkte wirklich vorhandene Kraft. Der Sinn derselben ist noch unbestimmt und werde vorläufig als nach links gerichtet angenommen.

Fig. 111.



Es müssen nun die beiden Ergänzungskräfte bestimmt werden. Der Punkt A des Rohres, wo der Massenpunkt sich im Zeitpunkte t befindet, hat eine gleichförmige Kreisbewegung, mithin eine Centripetalbeschleunigung $p_2 = x \cdot \omega^2$; daher ist die erste Ergänzungskraft einfach die Centrifugalkraft $m \cdot x \cdot \omega^2$. Denkt man sich auf Grund der S. 39 gepflogenen Erörterungen durch A eine zu der wahren Drehachse parallele Augenblicksachse gelegt, so ist die entsprechende, für die Ergänzungskraft massgebende Winkelgeschwindigkeit gleich ω und der Winkel $\alpha = 90^0$. Der gemäss dem Sinne der scheinbaren Geschwindigkeit w in Frage kommende Nachbarpunkt B bewegt sich bei der Drehung um A nach links; hierzu entgegengesetzt, also nach rechts, hat man die zweite Ergänzungskraft in der Grösse $2\,m \cdot w \cdot \omega$ an dem Massenpunkt anzubringen und kann nun behaupten, dass die scheinbare Bewegung des Massenpunktes längs des Rohres unter Einwirkung der drei in Fig. 111 angegebenen Kräfte erfolge. Da diese Bewegung wegen der geraden Form des Rohres ohne Normalbeschleunigung geschieht, so müssen die rechtwinklig zum Rohre stehenden Kräfte sich aufheben, d. h. es muss

1) $$N = 2m \cdot w \cdot \omega$$

sein, worin freilich w noch unbekannt ist. Es treibt also der bei der Drehung dem Massenpunkte folgende Theil der Rohrwandung den Punkt vor sich her. Man erhält w und somit auch N am einfachsten als Funktion des Ortes, d. h. als Funktion von x, wenn man den Satz vom Arbeitsvermögen (S. 88) verwendet. Von den drei Kräften verrichtet bei der scheinbaren Bewegung nur die Centrifugalkraft eine Arbeit, u. zw. längs des Bahntheilchens $AB = dx$ die Arbeit

2) $$d\mathfrak{A} = m \cdot x \cdot \omega^2 dx.$$

Hatte der Massenpunkt zu Anfang, für $t = 0$, den Abstand $x = a$ von der Achse O, die Geschwindigkeit c längs des Rohres, so ist

$$\frac{mw^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = m \cdot \omega^2 \int_a^x x \cdot dx = m \cdot \omega^2 \frac{x^2 - a^2}{2}.$$ Es ist also

3) $$w = \sqrt{c^2 + \omega^2 (x^2 - a^2)},$$

womit nun auch N nach Gl. 1 für jeden Punkt des Rohres feststeht.

Um das Gesetz der Bewegung längs des Rohres zu erhalten, schreibe man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x \cdot \omega^2$$

und integrire diese Gleichung zwei Mal. Das Ergebnis der ersten Integration liegt schon in Gl. 3, weil $dx = w \cdot dt$ ist, nämlich

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}, \quad \text{also}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}} = \omega \cdot dt.$$

Hieraus folgt $$l \left\{ \frac{x + \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}}{a + \frac{c}{\omega}} \right\} = \omega \cdot t;$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2} = \left(a + \frac{c}{\omega}\right) e^{\omega t} - x.$$

Hieraus findet man leicht

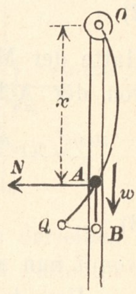
4) $$x = \frac{1}{2}\left\{\left(a + \frac{c}{\omega}\right)e^{\omega t} + \left(a - \frac{c}{\omega}\right)e^{-\omega t}\right\},$$

worin man noch den Drehungswinkel $\vartheta = \omega t$ des Rohres einführen kann. Die Geschwindigkeit längs des Rohres als Funktion der Zeit wird

5) $$w = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{2}\left\{\left(a + \frac{c}{\omega}\right)e^{\omega t} - \left(a - \frac{c}{\omega}\right)e^{-\omega t}\right\}.$$

In Wirklichkeit kann natürlich nicht von der blos gedachten Centrifugalkraft Arbeit verrichtet werden, sondern nur von der einzigen wirklich vorhandenen Kraft N, u. zw. ist deren Arbeit doppelt so gross wie die scheinbare Arbeit der Centrifugalkraft, wie Gl. 6 zeigt. Die wahre Bahnlinie des Punktes ist nach Gl. 4 mit $\vartheta = \omega t$ eine Spirale OAQ (Fig. 112). Wegen der Umfangsgeschwindigkeit $x \cdot \omega$ des Punktes A verrichtet N bei der unendlich kleinen Bewegung AQ die Arbeit

Fig. 112.



$$d\mathfrak{A}_w = N \cdot x \cdot \omega \cdot dt = 2m \cdot w \cdot \omega^2 x \cdot dt,$$

also, weil $w \cdot dt = dx$ ist,

6) $$d\mathfrak{A}_w = 2m \cdot \omega^2 x \cdot dx = 2\, d\mathfrak{A} \quad \text{(nach Gl 2).}$$

2. Bewegung eines Massenpunktes in einem gekrümmten, sich gleichmässig drehenden Rohre.

Eine in wagerechter Ebene befindliche Scheibe drehe sich mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω um eine lothrechte Achse O (Fig. 113). Auf dem Ringe der Scheibe, welche von dem inneren Halbmesser r_1 zu dem äusseren Halbmesser r_2 reicht, befinde sich ein gekrümmtes Rohr. Der Punkt möge bei C eine Geschwindigkeit w_1 gegen das Rohr gehabt haben; bei A in dem Abstande $OA = x$ von der Achse sei w die Geschwindigkeit gegen das Rohr, ϱ der Krümmungs-

Fig. 113.