Hiermit gehen Gl. 1 und 2 (S. 129) über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x}{r}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{y}{r}.$$

Diese stimmen mit der Gl. 2, S. 92 überein, wenn $k^2 = g:r$ gesetzt wird, bezeichnen daher eine elliptische Bewegung um den tiefsten Punkt der Kugel als Mittelpunkt und mit der Umlaufszeit (Gl. 10, S. 95)

$$t_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

(Vergl. auch S. 121/2, Fig. 101).

Auch der allgemeinere, S. 129—132 behandelte Fall führt, wie in Dr. Woldemar Voigt's Mechanik, S. 68 gezeigt wird, zu einer Bahnlinie, deren Horizontalprojektion Ähnlichkeit mit einer Ellipse hat, deren Hauptachsen sich aber fortgesetzt drehen.

E. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes.

Auf S. 48, Gl. 1, wurde gezeigt, dass die scheinbare oder relative Beschleunigung p_1 eines Punktes in Bezug auf einen beliebig bewegten Raum zu finden ist als geometrische Summe der wahren oder absoluten Beschleunigung p und zweier Ergänzungsbeschleunigungen $(-p_2)$ und $(-p_3)$. Davon bedeutet p_2 die Beschleunigung, mit welcher sich diejenige Stelle A der scheinbaren Bahnlinie bewegt, an welcher sich der Massenpunkt augenblicklich, d. h. im Zeitpunkte t, befindet; $(-p_2)$ ist das Entgegengesetzte von p_2. Ferner ist nach S. 40 $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \sin\alpha$, wenn w die augenblickliche scheinbare Geschwindigkeit, ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die scheinbare Bahnlinie um die durch den Punkt A derselben gelegt gedachte augenblickliche Drehachse dreht, α der Winkel, den diese Achse mit der scheinbaren Bahnlinie bildet. Ist AB das während des folgenden Zeittheilchens dt beschriebene

Bahntheilchen der scheinbaren Bewegung, so stimmt p_3 nach Richtung und Sinn mit der Bewegung des Punktes B bei der Drehung um die Augenblicksachse überein; $-p_3$ ist das Entgegengesetzte von p_3.

Die wahre Beschleunigung p ist die Folge der Mittelkraft K der wirklich vorhandenen Kräfte, es ist also

$$p = K : m \quad \text{oder} \quad K = mp\,.$$

Werden auch die übrigen hier in Frage kommenden Beschleunigungen mit der Masse m multiplicirt, so gilt, entsprechend der obigen Beziehung

$$p_1 \equiv p\,, \quad (-p_2)\,, \quad (-p_3) \quad \text{auch}$$

1) $$mp_1 \equiv K, \quad (-mp_2), \quad (-mp_3)\,.$$

Hierin kann die der scheinbaren oder relativen Beschleunigung p_1 entsprechende Kraft mp_1 als die scheinbare oder relative Kraft bezeichnet werden; $-mp_2$ und $-mp_3$ heissen die Ergänzungskräfte der scheinbaren Bewegung. Die scheinbare Kraft ergiebt sich also als die geometrische Summe oder Mittelkraft aus der wirklichen oder absoluten Kraft und den beiden Ergänzungskräften der scheinbaren Bewegung.

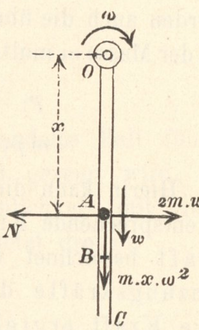
Die Hinzufügung der beiden Ergänzungskräfte zu den wirklichen Kräften gestattet, von der Bewegung der Bahnlinie oder des Raumes, in denen die Bewegung des Massenpunktes erfolgt, ganz abzusehen und die scheinbare Bewegung wie eine wahre Bewegung zu betrachten. Nach Anbringung der Ergänzungskräfte sind sämmtliche Hülfssätze, die für wahre oder absolute Bewegungen gefunden wurden, auch für die scheinbare Bewegung gültig. Nur darf man sich dadurch nicht verleiten lassen, die Ergänzungskräfte als wirklich vorhandene Kräfte anzusehen; sie sind nur gedachte (fingirte) Kräfte, zu dem Zwecke eingeführt, um die Untersuchung der scheinbaren Bewegung zu erleichtern.

Die zweite Ergänzungskraft $-2\,m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin\alpha$ wird zu Null, wenn $\omega = 0$ ist, d. h. wenn die Bahnlinie oder der Raum, in Bezug auf welche die scheinbare Bewegung betrachtet wird, sich nur verschiebt, nicht aber dreht, und ferner, wenn $w = 0$ ist, d. h. wenn der Massenpunkt in dem sich drehenden Raume scheinbar ruht, d. h. dessen Drehung einfach mitmacht. Diese beiden, erheblich einfacheren Fälle wurden schon im 1. Theile, S. 78 und 87 behandelt.

I. Bewegung eines Massenpunktes in einem geraden, sich gleichförmig drehenden Rohre ohne Reibung.

Die Drehung des Rohres OC (Fig. 111) erfolge mit der gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit ω (rechts herum) um eine das Rohr rechtwinklig schneidende Achse O. Der Massenpunkt befinde sich im Zeitpunkte t bei A im Abstand x von O und habe in Bezug auf das Rohr eine Geschwindigkeit w mit dem Sinne nach aussen. Die Schwere mg werde vernachlässigt oder stehe rechtwinklig zur Bildebene, so dass sie durch einen gleichen Gegendruck des Rohres aufgehoben wird; es sollen nur die in der Bildebene auftretenden Bewegungen und Kräfte betrachtet werden. Dann ist der in der Bildebene wirkende Normaldruck N des Rohres die einzige an dem Massenpunkte wirklich vorhandene Kraft. Der Sinn derselben ist noch unbestimmt und werde vorläufig als nach links gerichtet angenommen.

Fig. 111.



Es müssen nun die beiden Ergänzungskräfte bestimmt werden. Der Punkt A des Rohres, wo der Massenpunkt sich im Zeitpunkte t befindet, hat eine gleichförmige Kreisbewegung, mithin eine Centripetalbeschleunigung $p_2 = x \cdot \omega^2$; daher ist die erste Ergänzungskraft einfach die Centrifugalkraft $m \cdot x \cdot \omega^2$. Denkt man sich auf Grund der S. 39 gepflogenen Erörterungen durch A eine zu der wahren Drehachse parallele Augenblicksachse gelegt, so ist die entsprechende, für die Ergänzungskraft massgebende Winkelgeschwindigkeit gleich ω und der Winkel $\alpha = 90^0$. Der gemäss dem Sinne der scheinbaren Geschwindigkeit w in Frage kommende Nachbarpunkt B bewegt sich bei der Drehung um A nach links; hierzu entgegengesetzt, also nach rechts, hat man die zweite Ergänzungskraft in der Grösse $2\,m \cdot w \cdot \omega$ an dem Massenpunkt anzubringen und kann nun behaupten, dass die scheinbare Bewegung des Massenpunktes längs des Rohres unter Einwirkung der drei in Fig. 111 angegebenen Kräfte erfolge. Da diese Bewegung wegen der geraden Form des Rohres ohne Normalbeschleunigung geschieht, so müssen die rechtwinklig zum Rohre stehenden Kräfte sich aufheben, d. h. es muss

1) $$N = 2m \cdot w \cdot \omega$$

sein, worin freilich w noch unbekannt ist. Es treibt also der bei der Drehung dem Massenpunkte folgende Theil der Rohrwandung den Punkt vor sich her. Man erhält w und somit auch N am einfachsten als Funktion des Ortes, d. h. als Funktion von x, wenn man den Satz vom Arbeitsvermögen (S. 88) verwendet. Von den drei Kräften verrichtet bei der scheinbaren Bewegung nur die Centrifugalkraft eine Arbeit, u. zw. längs des Bahntheilchens $AB = dx$ die Arbeit

2) $$d\mathfrak{A} = m \cdot x \cdot \omega^2 dx.$$

Hatte der Massenpunkt zu Anfang, für $t = 0$, den Abstand $x = a$ von der Achse O, die Geschwindigkeit c längs des Rohres, so ist

$$\frac{mw^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = m \cdot \omega^2 \int_a^x x \cdot dx = m \cdot \omega^2 \frac{x^2 - a^2}{2}.$$ Es ist also

3) $$w = \sqrt{c^2 + \omega^2 (x^2 - a^2)},$$

womit nun auch N nach Gl. 1 für jeden Punkt des Rohres feststeht.

Um das Gesetz der Bewegung längs des Rohres zu erhalten, schreibe man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x \cdot \omega^2$$

und integrire diese Gleichung zwei Mal. Das Ergebnis der ersten Integration liegt schon in Gl. 3, weil $dx = w \cdot dt$ ist, nämlich

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}, \quad \text{also}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}} = \omega \cdot dt.$$

Hieraus folgt $$l \left\{ \frac{x + \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}}{a + \frac{c}{\omega}} \right\} = \omega \cdot t;$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2} = \left(a + \frac{c}{\omega}\right) e^{\omega t} - x.$$

Hieraus findet man leicht

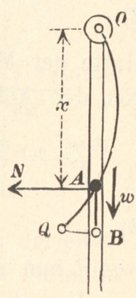
$$4)\qquad x = \frac{1}{2}\left\{\left(a + \frac{c}{\omega}\right)e^{\omega t} + \left(a - \frac{c}{\omega}\right)e^{-\omega t}\right\},$$

worin man noch den Drehungswinkel $\vartheta = \omega t$ des Rohres einführen kann. Die Geschwindigkeit längs des Rohres als Funktion der Zeit wird

$$5)\qquad w = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{2}\left\{\left(a + \frac{c}{\omega}\right)e^{\omega t} - \left(a - \frac{c}{\omega}\right)e^{-\omega t}\right\}.$$

In Wirklichkeit kann natürlich nicht von der blos gedachten Centrifugalkraft Arbeit verrichtet werden, sondern nur von der einzigen wirklich vorhandenen Kraft N, u. zw. ist deren Arbeit doppelt so gross wie die scheinbare Arbeit der Centrifugalkraft, wie Gl. 6 zeigt. Die wahre Bahnlinie des Punktes ist nach Gl. 4 mit $\vartheta = \omega t$ eine Spirale OAQ (Fig. 112). Wegen der Umfangsgeschwindigkeit $x \cdot \omega$ des Punktes A verrichtet N bei der unendlich kleinen Bewegung AQ die Arbeit

Fig. 112.



$$d\mathfrak{A}_w = N \cdot x \cdot \omega \cdot dt = 2m \cdot w \cdot \omega^2 x \cdot dt,$$

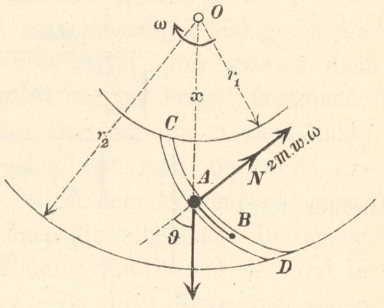
also, weil $w \cdot dt = dx$ ist,

$$6)\qquad d\mathfrak{A}_w = 2m \cdot \omega^2 x \cdot dx = 2\, d\mathfrak{A} \quad \text{(nach Gl 2).}$$

2. Bewegung eines Massenpunktes in einem gekrümmten, sich gleichmässig drehenden Rohre.

Eine in wagerechter Ebene befindliche Scheibe drehe sich mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω um eine lothrechte Achse O (Fig. 113). Auf dem Ringe der Scheibe, welche von dem inneren Halbmesser r_1 zu dem äusseren Halbmesser r_2 reicht, befinde sich ein gekrümmtes Rohr. Der Punkt möge bei C eine Geschwindigkeit w_1 gegen das Rohr gehabt haben; bei A in dem Abstande $OA = x$ von der

Fig. 113.



Achse sei w die Geschwindigkeit gegen das Rohr, ϱ der Krümmungs-

Halbmesser des Rohres, ϑ der Winkel zwischen dem Drehungshalbmesser $OA = x$ und der Normalen zum Rohre. Dann ist N wie S. 136 die einzige wirklich vorhandene Kraft in der Drehungsebene. Die erste Ergänzungskraft ist die Centrifugalkraft $m \cdot x \cdot \omega^2$, die zweite ist aus denselben Gründen wie im vorigen Beispiele $= 2m \cdot w \cdot \omega$, normal zu AB gerichtet mit dem Sinne nach rechts. Bei der scheinbaren Bewegung ist wieder die Centrifugalkraft die einzige, welche Arbeit verrichtet; daher

$$\frac{mw^2}{2} - \frac{mw_1^2}{2} = m \cdot \omega^2 \int_{r_1}^{x} x \cdot dx = \frac{m \cdot \omega^2}{2}(x^2 - r_1^2), \quad \text{also}$$

$$1) \qquad w^2 = w_1^2 + \omega^2(x^2 - r_1^2).$$

Hierdurch ist w für jede Stelle des Rohres bestimmt. Da die scheinbare Bewegung krummlinig erfolgt, so ist die Centripetal-Beschleunigung

$$\frac{w^2}{\varrho} = \frac{N + 2m \cdot w \cdot \omega - m \cdot x \cdot \omega^2 \cos\vartheta}{m}, \quad \text{also}$$

$$2) \qquad N = m\left\{\frac{w^2}{\varrho} + x \cdot \omega^2 \cos\vartheta - 2w \cdot \omega\right\};$$

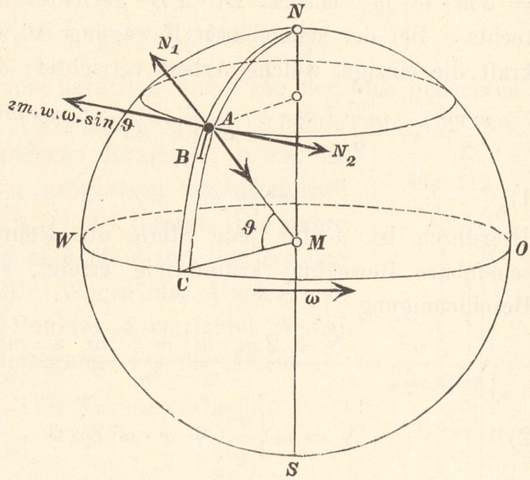
sind ϱ und ϑ für jede Stelle des Rohres bekannt, so ist mit Hülfe von Gl. 1 auch N überall bestimmt.

Bei den Radial-Turbinen bewegen sich die Wassertheilchen an Schaufeln entlang, die etwa die Form $CABD$ haben, und üben dabei nach dem Gesetze der Wechselwirkung auf die Schaufel eine der Kraft N entgegengesetzte Druckkraft aus, welche eben die Triebkraft für das Rad bildet und daher an jeder Stelle positiv sein soll. Dagegen würde $N = 0$ die Bedingung sein für die Form derjenigen scheinbaren Bahnlinie, welche der Massenpunkt ohne Einwirkung wahrer Kräfte auf der sich drehenden Scheibe beschreiben würde. Die wahre Bahnlinie ist in diesem Falle eine Gerade.

3. Vorgeschriebene Bewegung längs eines Meridians der sich drehenden Erde.

Ein Massenpunkt m werde auf der nördlichen Halbkugel der Erde mit der Geschwindigkeit w längs eines Meridianes im Sinne von Norden nach dem Äquator bewegt; dann wird ausser der Anziehungskraft der Erde noch der Widerstand der Bahnlinie wirken, welcher sich in eine Seitenkraft N_1 in der Meridianebene und in eine Seitenkraft N_2 rechtwinklig zur Meridianebene und tangential zum Parallelkreise des augenblicklichen Ortes A (Fig. 114) zerlegen lässt. Um N_1 und N_2, besonders die letztere, leicht bestimmen zu können, denkt man sich die Drehung der Erde weg und dafür die beiden Ergänzungskräfte angebracht. Die erste Ergänzungskraft ist die dem augenblicklichen Ort A entsprechende Centrifugalkraft; sie kann unberücksichtigt bleiben, wenn man als Schwere sogleich die scheinbare Schwere $m \cdot g_\vartheta$ nach 1. Theil, S. 93, die wir allein wahrnehmen und messen können, einführt und welche schon die Mittelkraft aus der wahren Schwere und der Centrifugalkraft wegen der Erddrehung darstellt. Die Richtung dieser scheinbaren Schwere fällt mit der Richtung des Lothes zusammen.

Fig. 114.



Schneidet der Meridian den Äquator in C und ist M der Mittelpunkt der Erde, so bezeichnet der Winkel $AMC = \vartheta$ die geographische Breite des Ortes A. Legt man durch A eine Drehachse parallel der Erdachse, so bildet diese mit dem Bahntheilchen AB ebenfalls den Winkel ϑ, weil die Erdachse zu CM rechtwinklig ist. Dreht man das Bahntheilchen AB um die durch A gelegte Achse im Sinne der Erddrehung, d. h. von West nach Ost, so bewegt sich dadurch B in seinem Parallelkreise nach Osten; die zweite Ergänzungskraft ist daher eine tangential zum Parallelkreise liegende Kraft von der Grösse $2 \cdot m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta$ mit dem

Sinne nach Westen. Da nun der Massenpunkt bei seiner scheinbaren Bewegung die Meridianebene nicht verlässt, so müssen sich die rechtwinklig zu dieser Ebene wirkenden Kräfte aufheben, d. h. es muss die zweite Ergänzungskraft durch einen eben so grossen Gegendruck

1) $$N_2 = 2 \cdot m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta$$

aufgehoben werden. Diesen Seitendruck muss die westliche Seitenwand der vorgeschriebenen Bahn leisten.

In der Meridianebene führt der Punkt eine gleichförmige Kreisbewegung aus, wenn man die Abweichung der Erdform von einer Kugel nicht beachtet. Ist r der Erdhalbmesser, so entspricht dieser Kreisbewegung eine Centripetalbeschleunigung $w^2 : r$, welche von der Centripetalkraft $mg_\vartheta - N_1$ erzeugt werden muss. Sonach ist

2) $$N_1 = mg_\vartheta - \frac{mw^2}{r}.$$

N_1 ist der Widerstand des Erdbodens, also, lothrecht nach unten genommen, der Druck, den der Massenpunkt auf den Erdboden ausübt. Derselbe vermindert sich nach Gl. 2 mit zunehmender Geschwindigkeit w. Er wird zu Null für

2) $$w = \sqrt{g_\vartheta \cdot r} = 7905\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}.$$

(s. S. 57 und 104), wenn man $g_\vartheta = 9{,}81$ und $r = 6\,370\,000^{\mathrm{m}}$ einführt (s. 1. Theil, S. 94). Für Geschwindigkeiten, wie sie im menschlichen Verkehr auf fester Bahn vorkommen, z. B. auf Eisenbahnen, ist genau genug $N_1 = mg_\vartheta$ wie im Ruhezustande.

Blickt man im Sinne der Bewegung die Bahn entlang, so ist bei der Bewegung von Norden nach dem Äquator die westliche Seitenwand der Bahn, die den Druck N_2 zu leisten hat, die rechtsseitige. Der Massenpunkt übt also bei der Bewegung einen wagerechten Seitendruck nach rechts aus und äussert dadurch das Bestreben nach rechts von der Bahn abzuweichen. Erfolgt die Bewegung umgekehrt vom Äquator nach Norden hin, so vertauschen die beiden Nachbarpunkte A und B des Bahntheilchens ihre Rollen, ähnlich wie in dem Beispiele S. 41—43; der Endpunkt des Bahntheilchens bewegt sich dann, wenn man das Theilchen um eine durch den Anfangspunkt gelegte Achse übereinstimmend mit der Erde sich drehen lässt, nach Westen; daher erhält die zweite Ergänzungskraft einen Sinn nach Osten, der Seitendruck N_2 einen solchen nach

Westen. Diese muss von der östlichen Seitenwand ausgeübt werden; das ist für den nunmehrigen Sinn der Bewegung des Punktes wiederum die rechtsseitige Wand.

In gleicher Weise findet man, dass ein Massenpunkt, der auf der südlichen Halbkugel längs des Meridians bewegt wird, sich stets gegen die linke Seitenwand presst.

Die Druckkraft ist nach Gl. 1 verhältnisgleich mit der Geschwindigkeit w und dem Sinus der geographischen Breite, ist also am Äquator Null, am Pol am grössten.

Nach 1. Theil, S. 92 ist

$$\omega = 2\pi : 86\,164 = 0{,}000\,073.$$

Für Hannover ist

$$\vartheta = 52^0\,23', \quad \sin\vartheta = 0{,}7921, \quad \omega \cdot \sin\vartheta = 0{,}000\,057\,8,$$

$$\frac{N_2}{mg} = \frac{2 \cdot w \cdot 0{,}000\,057\,8}{9{,}81} = 0{,}000\,011\,78\,w.$$

Hiernach übt auf der nördlichen Halbkugel ein mit $20\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ Geschwindigkeit längs des Meridians fahrender Eisenbahnzug von $150\,000^{\mathrm{kg}}$ Gewicht eine wagerechte Druckkraft gegen die rechtsseitige Schiene aus von

$$N_2 = 150\,000 \cdot 0{,}000\,011\,78 \cdot 20 = 35{,}3^{\mathrm{kg}}.$$

Auf einer zweigleisigen Bahn, wo jedes Gleis stets in derselben Fahrrichtung benutzt wird, also stets dieselbe Schiene den Seitendruck N_2 empfängt, würde man trotz der Kleinheit von N_2 im Verhältnis zu mg vielleicht auf den Gedanken kommen können, der Gefahr einer seitlichen Verschiebung des Gleises oder gar einer Entgleisung nach rechts durch eine Überhöhung der rechtsseitigen Schiene vorzubeugen, wie man in Eisenbahnkurven die äussere Schiene überhöht (s. 1. Theil, S. 71). Für den Winkel α, um den die Querlinie des Gleises gegen die Wagerechte gedreht werden müsste, gilt

$$2) \qquad \alpha = \frac{N_2}{mg} = \frac{35{,}3}{150\,000} = 0{,}000\,235\,6,$$

was bei 1500^{mm} Schienenentfernung einer Überhöhung der rechtsseitigen Schiene um $0{,}35^{\mathrm{mm}}$ entspricht. Eine so geringe Überhöhung hat aber praktisch weder Sinn noch Zweck. Da in einer Kurve vom Halbmesser ϱ für den Winkel α gilt (1. Theil, S. 71)

$$\alpha = \frac{w^2}{g\varrho},$$

so würde obiger Werth von α bei $w = 20^{m}/_{s.}$ einem Krümmungshalbmesser $\varrho = 173\,100^{m}$ entsprechen.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit w längs des Meridians in Bewegung gesetzt, ist aber eine vorgeschriebene Bahn, welche die Druckkraft ausüben könnte, nicht vorhanden, so wird er mit einer der zweiten Ergänzungskraft entsprechenden Beschleunigung $2w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta$ vom Meridiane nach rechts hin abweichen. Bleibt diese Beschleunigung während der Zeit t unverändert, so erfährt der Punkt eine seitliche Abweichung

3) $$z = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t^2 = l \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t,$$

wenn man $w \cdot t$ mit l vertauscht. Diese Abweichung kommt z. B. in Frage, wenn ein Massenpunkt in der Richtung des Meridians geworfen wird. Darin bedeutet w die mittlere wagerechte Seitengeschwindigkeit.

In dem Beispiel auf S. 111 wurde die Wurfweite von 8460^{m} in $19{,}14^{s.}$ zurückgelegt. Die hiernach berechnete rechtsseitige Abweichung ergiebt sich zu

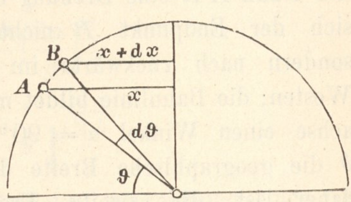
$$z = 8460 \cdot 0{,}000\,057\,8 \cdot 19{,}14 = 9{,}36^{m},$$

wenn das Geschütz in der Richtung des Meridians in der geographischen Breite Hannovers abgefeuert wird.

Unmittelbare Berechnung der seitlichen Abweichung.

Die Beseitigung der Bewegung des Raumes, in welchem die scheinbare Bewegung erfolgt, und die Ersetzung derselben durch die Ergänzungskräfte ist zwar für die Beantwortung mancher Frage sehr vortheilhaft, verdunkelt aber den wirklichen Vorgang; es ist deshalb nützlich, in geeigneten Fällen die scheinbare Bewegung auch durch Betrachtung der wirklichen Bewegungsverhältnisse zu untersuchen. Solches möge hier hinsichtlich der seitlichen Abweichung nach rechts (auf der nördlichen Halbkugel) geschehen.

Fig. 115.



Bei dem Übergange des Massenpunktes von A nach B (Fig. 115) ändert sich der Drehungshalbmesser von x auf $x + dx$, d. h. von $r \cos\vartheta$ auf $r(\cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot d\vartheta)$. Der Punkt A der Erdoberfläche hat die Umdrehungsgeschwindigkeit $x \cdot \omega$, der Punkt B aber die um $r \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$ kleinere. Der von A nach B kommende Massenpunkt bringt nun ausser der scheinbaren Geschwindigkeit w längs des Meridianes die Drehungsgeschwindigkeit $x \cdot \omega = r \cdot \omega \cdot \cos\vartheta$ längs des Parallelkreises mit und ist nun, nachdem er in B angelangt, der hier langsamer sich bewegenden Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit $r \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$ nach Osten vorausgeeilt. Dem entspricht in der Zeit dt eine östliche Voreilung um

$$dz = r \cdot \omega \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot dt,$$

oder, weil $r \cdot d\vartheta = AB = w \cdot dt$ ist, um $dz = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot dt^2$, also für kleine endliche Bewegungen in kurzem Zeitraume t um

$$z = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t^2,$$

oder auch, wenn man die Wegeslänge $AB = w \cdot t = l$ setzt:

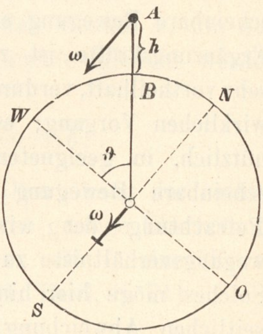
$$z = l \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t,$$

übereinstimmend mit Gl. 3.

4. Vorgeschriebene Bewegung längs einer lothrechten Bahn auf der sich drehenden Erde.

In einem lothrechten Rohre AB (Fig. 116) von der Höhe h falle ein Massenpunkt; dann ist zunächst die Schwere eine der wirklichen Kräfte. Von den Ergänzungskräften ist die erste schon berücksichtigt, wenn man mit der scheinbaren Schwere rechnet. Legt man nun durch A eine zur Erdachse SN parallele Achse und ertheilt der Bahn AB eine Drehung ω, so bewegt sich der Endpunkt B nicht nach vorn, sondern nach rückwärts im Sinne nach Westen; die Bahnlinie bildet mit der Drehachse einen Winkel $\alpha = 90^0 - \vartheta$, wenn ϑ die geographische Breite des Ortes A; daher ist die zweite Ergänzungskraft $2m \cdot w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta$, u. zw. mit dem Sinne nach Osten, und da

Fig. 116.

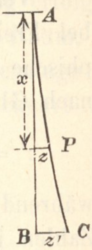


die scheinbare Bahnlinie AB geradlinig ist, so wird diese Ergänzungskraft aufgehoben durch eine entgegengesetzte Kraft

1) $$N_2 = 2\,m \cdot w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta,$$

welche nach Westen gerichtet ist, also von der östlichen Rohrwandseite ausgeübt wird. Der Massenpunkt drückt daher mit einer Kraft N_2 gegen die östliche Seite der Rohrwand und wird, wenn man das Rohr entfernt, den Punkt also frei fallen lässt, mit der Beschleunigung $2\,w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta$ von der Lothrechten in östlichem Sinn abweichen. Ist AB (Fig. 117) die Lothrechte, APC die Bahn des freien Falles in Bezug auf die sich drehende Erde, z die östliche Abweichung, so ist

Fig. 117.



$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta.$$

Die Geschwindigkeit w längs APC kann wegen der Geringfügigkeit von z nach den gewöhnlichen Fallgesetzen beurtheilt werden; dann ist $w = gt$, also

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2 \cdot g \cdot t \cdot \omega \cdot \cos\vartheta.$$

Dies giebt $$\frac{dz}{dt} = g \cdot \omega \cdot \cos\vartheta \cdot t^2,$$

wobei die Integrationskonstante fortbleibt, weil für $t = 0$ auch

$$w = 0, \quad N_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

sein muss. Weiter wird

$$z = g \cdot \omega \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{t^3}{3};$$

hieraus kann mit $x = \frac{gt^2}{2}$ also $t^2 = \frac{2\,x}{g}$ die Zeit entfernt werden.

Es wird $$z = g \cdot \omega \cdot \frac{\cos\vartheta}{3}\left(\frac{2\,x}{g}\right)^{3/2},$$

und für $x = h$:

2) $$z' = \frac{2}{3}\,\omega \cdot \cos\vartheta \cdot h\sqrt{\frac{2\,h}{g}}.$$

Die eigentliche Ursache dieser östlichen Abweichung eines frei fallenden Körpers von der Lothrechten, die am Pole Null, am

Äquator (mit $\cos\vartheta = 1$) am grössten ist, liegt natürlich darin, dass der bei A frei gelassene Körper die seiner Anfangslage entsprechende östliche Umfangsgeschwindigkeit der Erddrehung mitbringt und der bei B mit geringerer Umfangsgeschwindigkeit sich bewegenden Stelle der Lothrechten also vorauseilt. Daher ist auch auf beiden Halbkugeln der Erde die Abweichung übereinstimmend nach Osten gerichtet.

Versuche über diesen Vorgang sind besonders in einem Schachte bei Freiberg in Sachsen angestellt worden. Dort ist die geographische Breite $\vartheta = 51^0$; die Fallhöhe betrug $158{,}5^{\text{m}}$. Dann ist nach Gl. 2:

$$z' = \frac{2}{3} \cdot 0{,}000073 \cdot 158{,}5 \cdot \cos 51^0 \sqrt{\frac{2 \cdot 158{,}5}{9{,}81}} = 0{,}0276^{\text{m}},$$

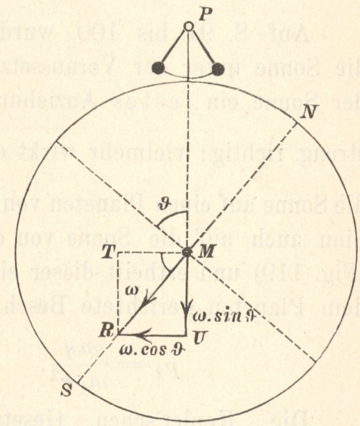
während die Beobachtung $0{,}0283^{\text{m}}$ ergab. Der Unterschied beider Zahlen ist leicht dadurch zu erklären, dass wegen des Luftwiderstandes die Falldauer $> \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ werden muss.

5. Einfluss der Drehung der Erde auf die Pendelschwingung; Foucault'scher Pendelversuch.

Bei kleinem Ausschlagwinkel kann die Pendelbewegung nach S. 121/2 annähernd als geradlinige Schwingungsbewegung aufgefasst werden. Das S. 121 entwickelte Gesetz der Pendelschwingung galt unter der Annahme, dass die Erde in Ruhe sei; unter dieser Voraussetzung erfolgt die Schwingung in einer unveränderlichen lothrechten Ebene. Untersucht man aber die scheinbare Bewegung eines Pendels in Bezug auf die sich drehende Erde, so ergiebt sich eine von dem französischen Physiker Foucault (geboren am 18. September 1819 zu Paris, gestorben daselbst am 11. Februar 1868) im Jahr 1852 gefundene Abweichung. Bei einem am Äquator schwingenden Pendel haben Aufhängepunkt, Erdoberfläche, sowie auch der Massenpunkt des Pendels die sehr grosse Umfangsgeschwindigkeit der Erde nahezu gemeinsam. Daher sind die Verhältnisse mit grosser Annäherung dieselben, als ob das Pendel in einem Raum aufgehängt wäre, der eine geradlinige, gleichförmige Verschiebung erfährt; die scheinbare Schwingung erfolgt daher ganz so, wie es bei ruhender Erde geschehen würde; nur kommt statt der wahren Fallbeschleunigung die scheinbare Fallbeschleunigung am Äquator, d. h. $g_0 = 9{,}781$ (s. 1. Theil, S. 92) bei der Berechnung der Schwingungsdauer zur Anwendung.

Ist ein Pendel aber am Pol aufgehängt, so hat der Aufhängepunkt keine Bewegung. Auf den Massenpunkt wirkt die wahre Schwere mit der Fallbeschleunigung $g = 9{,}831$ (1. Theil, S. 94) und die Fadenspannkraft. Die wahre Pendelschwingung erfolgt in einer unveränderlichen Ebene. Die Erde bildet einen Raum, der sich gegen diese unveränderliche Ebene in einem Sterntage ein Mal in dem Sinne von Westen nach Osten dreht; umgekehrt wird also die Schwingungsebene des Pendels in einem Sterntage sich ein Mal in dem Sinne von Osten nach Westen scheinbar gegen die Erde drehen.

Fig. 118.



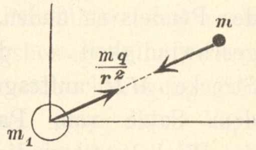
Ist das Pendel aber bei P (Fig. 118) in einer nördlichen geographischen Breite ϑ aufgehängt, so kann man, um die scheinbare Bewegung der Schwingungsebene des Pendels zu finden, die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde als Strecke MR auftragen und nach dem Satze vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten (S. 35) in die Theilstrecken $UR = \omega \cdot \cos \vartheta$ und $MU = \omega \cdot \sin \vartheta$ zerlegen. Von diesen beiden hat $\omega \cdot \cos \vartheta$, wie vorstehend für das am Äquator aufgehängte Pendel erläutert, keinen Einfluss auf die Schwingungsebene des Pendels, sondern nur eine verkleinernde Wirkung auf die scheinbare Fallbeschleunigung $g_\vartheta = 9{,}806 - 0{,}025 \cos 2\vartheta$ (1. Theil, S. 94). Die Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin \vartheta$, deren Achse durch den Aufhängepunkt P des Pendels geht, bedingt aber, nach Vergleich mit dem für ein am Pol aufgehängtes Pendel, eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin \vartheta$ in einem Sinne, welcher der Drehung der Erde entgegengesetzt ist, d. h. in demselben Sinne, in welchem der scheinbare Umlauf der Sonne um die Erde erfolgt, nämlich für die nördliche

Halbkugel von Ost über Süd nach West, für die südliche Halbkugel von Ost über Nord nach West. Da die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde einer Umlaufszeit gleich einem Sterntag entspricht, so wird bei der kleineren Geschwindigkeit $\omega \cdot \sin\vartheta$ ein Umlauf die Zeit von $1 : \sin\vartheta$ Tagen erfordern. Für Hannover mit $\sin\vartheta = 0{,}7921$ ergiebt dies 1,26 Tage. In dieser Zeit dreht sich die Schwingungsebene des Pendels scheinbar um die durch den Aufhängepunkt desselben gelegte Lothrechte.

6. Scheinbare Bewegung der Planeten in Bezug auf die Sonne.

Auf S. 97 bis 100 wurde die Bewegung der Planeten um die Sonne unter der Voraussetzung behandelt, dass der Mittelpunkt der Sonne ein festes Anziehungscentrum sei. Dies ist aber nicht streng richtig; vielmehr wirkt die Kraft $\frac{mq}{r^2}$ (Gl. 1, S. 97), welche die Sonne auf einen Planeten von der Masse m ausübt, in umgekehrtem Sinn auch auf die Sonne von der Masse m_1 (Fig. 119) und ertheilt dieser eine stets nach dem Planeten gerichtete Beschleunigung

F. 119.



$$p_2 = \frac{mq}{m_1 r^2}.$$

Die Kepler'schen Gesetze betreffen nur die scheinbare Bewegung der Planeten in Bezug auf die Sonne, d. h. in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Sonne gelegtes, mit diesem sich parallel verschiebendes Achsenkreuz. Um die scheinbare Beschleunigung zu erhalten, muss man zu der wahren Beschleunigung $p = q : r^2$ des Planeten im Sinne nach der Sonne noch das Entgegengesetzte der Beschleunigung p_2 hinzufügen. Da nun $+ p_2$ den Sinn von der Sonne nach dem Planeten hat, so ist der Sinn der Ergänzungsbeschleunigung $- p_2$ ebenso wie p vom Planeten nach der Sonne gerichtet, und die scheinbare Beschleunigung p_1 wird die Summe beider, nämlich

$$p_1 = \frac{q}{r^2}\left(1 + \frac{m}{m_1}\right).$$

Da die früheren Untersuchungen S. 97 auf einer Beschleunigung $q : r^2$ beruhten, so sind deren Ergebnisse noch in der Weise zu berichtigen, dass der von der Sonnenmasse abhängige Festwerth q durchweg noch mit $1 + \frac{m}{m_1}$ multiplicirt wird. Für die Bewegung der Planeten ist diese Äenderung unbedeutend, da $m : m_1$ meist eine kleine Zahl, für die Erde $1 : 355000$, für den Jupiter freilich etwa $1 : 1000$. Für die Bewegung des Mondes um die Erde ist dieser Umstand schon erheblicher, da deren Massenverhältnis etwa $1 : 77$ beträgt.
