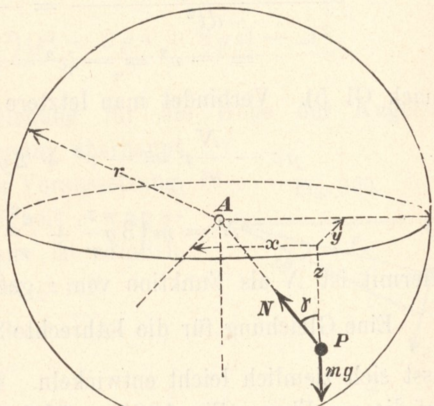
D. Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche; räumliches Pendel.

Der Massenpunkt sei mittels eines Fadens von der Länge r an den Mittelpunkt A der Kugelfläche gefesselt (Fig. 108a). Bildet der Faden in der Lage AP mit den drei Achsen die Winkel α, β, γ, so ist

$$r \cos \alpha = x;$$
$$r \cos \beta = y;$$
$$r \cos \gamma = z.$$

Fig. 108 a.



In der x-Richtung wirkt nur $-N \cdot \cos \alpha$, in der y-Richtung nur $-N \cdot \cos \beta$, in der z-Richtung $mg - N \cdot \cos \gamma$. Daher erhält man die Gleichungen

1) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{N}{m}\frac{x}{r};$$

2) $$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{N}{m}\frac{y}{r};$$

3) $$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - \frac{N}{m}\frac{z}{r}$$

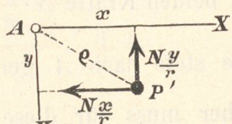


Fig. 108 b.

und als Ersatz für die unbekannte Grösse der Kraft N die Gleichung der Kugel

4) $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Da der Normalwiderstand N keine Arbeit verrichtet, so gilt, wenn zu Anfang der Massenpunkt sich in einer Tiefe $z = h$ unter dem Mittelpunkt A befand und die Geschwindigkeit c hatte, für die Geschwindigkeit v an der beliebigen Stelle P:

5) $$v^2 = c^2 + 2g(z - h) = c^2 - 2gh + 2gz.$$

Um nun zunächst N zu bestimmen, multiplicire man die Gleichungen 1, 2 und 3 bezw. mit x, y, z und zähle sie zusammen; man erhält dann:

$$6)\quad \frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = gz - \frac{N}{m}\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = gz - \frac{N}{m} r.$$

Gl. 4 giebt aber, zweimal nach t differentiirt:

$$7)\quad xdx + ydy + zdz = 0 \quad \text{und}$$

$$xd^2x + dx^2 + yd^2y + dy^2 + zd^2z + dz^2 = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = -\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

$$= -v^2 = -(c^2 - 2gh + 2gz)$$

(nach Gl. 5). Verbindet man letztere Gl. mit Gl. 6, so ergiebt sich

$$gz - \frac{N}{m} r = -c^2 + 2gh - 2gz, \quad \text{also}$$

$$8)\quad N = m\left(3g\frac{z}{r} + \frac{c^2}{r} - 2g\frac{h}{r}\right).$$

Hiermit ist N als Funktion von z gefunden.

Eine Gleichung für die lothrechte Seitengeschwindigkeit $v_z = \frac{dz}{dt}$ lässt sich ziemlich leicht entwickeln. Die Projektion der Bewegung auf die xy-Ebene (Fig. 108b) erfolgt nämlich nur unter Einwirkung der beiden Kräfte $N \cdot \frac{x}{r}$ und $N \cdot \frac{y}{r}$, welche mit $AP' = \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ eine stets nach A gerichtete Mittelkraft $N \cdot \frac{\varrho}{r} = N \sin \gamma$ liefern. Daher muss für diese Projektionsbewegung nach S. 85 der Satz der Flächen gelten, so dass nach Gl. 4, S. 86, wenn man darin r mit ϱ vertauscht,

$$9)\quad \varrho^2 d\vartheta = A \cdot dt \quad \text{oder}$$

$$10)\quad x \cdot dy - y \cdot dx = A \cdot dt \quad \text{wird.}$$

Bildet man aus Gl. 7:

$$xdx + ydy = -z \cdot dz,$$

quadrirt diese und addirt sie zu der quadrirten Gl. 10, so ergiebt sich

$$x^2dx^2 + 2xy \cdot dx \cdot dy + y^2dy^2 = z^2dz^2$$

$$y^2dx^2 - 2xy \cdot dx \cdot dy + x^2dy^2 = A^2dt^2$$

$$\overline{(x^2 + y^2)dx^2 + (x^2 + y^2)dy^2 = z^2 \cdot dz^2 + A^2 \cdot dt^2}.$$

Vertauscht man nun, um x und y zu entfernen, $x^2 + y^2$ mit $r^2 - z^2$ (nach Gl. 4), so wird

$$(r^2 - z^2)(dx^2 + dy^2) = A^2 dt^2 + z^2 dz^2,$$

und wenn man weiter, um auch dx und dy zu beseitigen, links noch $r^2 dz^2 - r^2 dz^2$ hinzufügt,

$$(r^2 - z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - r^2 dz^2 = A^2 dt^2, \quad \text{also, weil}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = v^2 dt^2 = (c^2 - 2gh + 2gz)dt^2 \quad \text{(Gl. 5):}$$

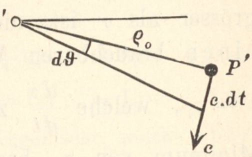
$$(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz)dt^2 - r^2 dz^2 = A^2 dt^2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$11) \qquad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz) - A^2}{r^2}.$$

Eine interessante Beziehung für die Höhe der Kugelzone, innerhalb welcher die Bewegung überhaupt erfolgt, erhält man unter der Voraussetzung, dass die Anfangsgeschwindigkeit c wagerecht gerichtet war. Dann ist nämlich, wenn der Anfangswerth von ϱ mit

Fig. 109.



$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{r^2 - h^2}$$

bezeichnet wird (Fig. 109),

$$\varrho_0 \cdot d\vartheta = c \cdot dt,$$

also nach Gl. 9 für den Anfang der Bewegung

$$A = \varrho_0^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \varrho_0 c = c\sqrt{r^2 - h^2}, \quad \text{d. h.}$$

$$A^2 = c^2(r^2 - h^2).$$

Mit Einführung dieses Werthes wird aus Gl. 11:

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz) - c^2(r^2 - h^2)}{r^2},$$

was sich leicht zu

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{2g(r^2 - z^2)(z - h) - c^2(z^2 - h^2)}{r^2}$$

und dann auch zu

$$12) \qquad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{z - h}{r^2}\left\{2g(r^2 - z^2) - c^2(z + h)\right\}$$

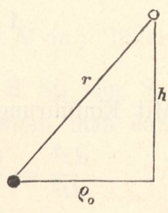
umschreiben lässt.

Will man diejenigen Werthe von z kennen, für welche $\frac{dz}{dt} = 0$ wird, so setze man die rechte Seite gleich Null. Dem entspricht zunächst $z = h$, was selbstverständlich ist, weil ja angenommen war, dass die Anfangsgeschwindigkeit c wagerecht sei. Setzt man aber den eingeklammerten zweiten Faktor der rechten Seite der Gl. 12 gleich Null, so folgt, dass für

$$13)\qquad z = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{2g} \pm \sqrt{r^2 - h \cdot \frac{c^2}{2g} + \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2}$$

ebenfalls $\frac{dz}{dt}$ zu Null wird. Von den beiden Werthen z_1 und z_2, welche durch Gl. 13 bestimmt werden, ist, wie Zahlenrechnungen zeigen, der eine, absolut genommen, stets kleiner als r, der andere stets grösser als r. Da aber bei der vorgeschriebenen Bewegung auf der Kugelfläche vom Halbmesser r ein Werth von z, der grösser als r ist, nicht vorkommen kann, so liefert Gl. 13 nur *einen* brauchbaren Werth z_1. Die beiden Werthe $z = h$ und $z = z_1$, welche $\frac{dz}{dt}$ zu Null machen, bezeichnen Maximum und Minimum von z, begrenzen also diejenige Kugelzone, innerhalb deren die Bewegung erfolgt. An den wagerechten Rändern dieser Zone hört der Punkt auf zu steigen bezw. zu fallen, kehrt also seine lothrechte Seitenbewegung um.

Fig. 110.



Bei bestimmtem Halbmesser r der Halbkugel und bestimmter Tiefe h des Anfangspunktes der Bewegung giebt es auch eine Anfangsgeschwindigkeit c, für welche die beiden äussersten Werthe h und z_1 von z einander gleich werden, so dass dann die Bewegungszone zu einem wagerechten Kreise mit konstantem $z = h$ zusammenschrumpft. Man findet diese Geschwindigkeit c indem man in Gl. 13 $z = h$ einführt. Dann folgt

$$\left(h + \frac{1}{2}\frac{c^2}{2g}\right)^2 = r^2 - h \cdot \frac{c^2}{2g} + \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2 \quad \text{oder}$$

$$14)\qquad \frac{c^2}{2g} = \frac{r^2 - h^2}{2h} = \frac{\varrho_0{}^2}{2h} \quad \text{(Fig. 110)} \quad \text{und} \quad c = \varrho_0\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Die Vorrichtung bildet mit dieser Geschwindigkeit c das im 1. Theile, S. 69 behandelte Kegelpendel. Die Bewegung in dem wagerechten Kreis erfolgt gleichförmig, die Umlaufszeit ist

$$t_1 = \frac{2\varrho_0 \pi}{c} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Beispiel: An dem Endpunkt eines bei A (Fig. 108) befestigten Fadens von $r = 1^{\mathrm{m}}$ Länge befinde sich eine kleine Bleikugel; der Faden sei derartig ausgestreckt, dass die Kugel sich anfänglich in einer Tiefe $h = 0{,}5^{\mathrm{m}}$ unter A befinde. Es soll die Kugel nun wagerecht und rechtwinklig zum Faden mit einer Geschwindigkeit c fortgeschnellt und der Werth z_1 ermittelt werden, welcher mit h die Bewegungszone begrenzt. Für c sollen der Reihe nach verschiedene Grössen eingeführt werden.

Für $\frac{c^2}{2g} =$	4^{m}	3^{m}	2^{m}	1^{m}	$0{,}75^{\mathrm{m}}$	$0{,}5^{\mathrm{m}}$	$0{,}25^{\mathrm{m}}$
d. h. $c =$	8,86	7,67	6,26	4,43	3,84	3,13	2,215

wird nach Gl. 13

$z_1 =$	$-0{,}268$	$-0{,}18$	0	$+0{,}366$	$+0{,}5$	$+0{,}651$	$+0{,}819$
$z_2 =$	$-3{,}732$	$-2{,}83$	-2	$-1{,}366$	$-1{,}25$	$-1{,}151$	$-1{,}069$.

Negative Werthe von z bedeuten Stellen der Kugelfläche, welche oberhalb des Mittelpunktes liegen. Bei Geschwindigkeitshöhen $> 0{,}75$ steigt der Massenpunkt von der um $h = 0{,}5^{\mathrm{m}}$ unterhalb des Mittelpunktes gelegenen Anfangslage bis zu der durch z_1 angegebenen Höhe empor, um dann wieder zu der ursprünglichen wagerechten Ebene zurückzusinken. Diese Bewegung auf- und abwärts wiederholt sich fortwährend, wobei der Massenpunkt übrigens im Allgemeinen nicht wieder die gleichen Stellen durchläuft. Bei einer Geschwindigkeitshöhe $= 0{,}75^{\mathrm{m}}$ fallen (in Übereinstimmung mit Gl. 14) z_1 und h zusammen, d. h. der Punkt bleibt stets in gleicher Höhe. Bei Geschwindigkeitshöhen $< 0{,}75^{\mathrm{m}}$ ist $z_1 > h_1$, d. h. der Massenpunkt sinkt aus der Anfangshöhe herab. Bei allen vorstehend angenommenen Werthen von c und daraus berechneten Grössen z_1 bleibt N durchweg positiv, kann also durch einen Faden ausgeübt werden.

Kleine Schwingungen. Befindet sich der Massenpunkt zu Anfang in nur geringer Entfernung vom tiefsten Punkte der Kugelfläche und bekommt er eine so wenig erhebliche Geschwindigkeit, dass er sich nur unbedeutend heben kann, so wird annähernd $\left(\text{mit } z = h = r \text{ und kleinem } \frac{c^2}{2g}\right)$ nach Gl. 8:

$$N = mg.$$

Hiermit gehen Gl. 1 und 2 (S. 129) über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x}{r}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{y}{r}.$$

Diese stimmen mit der Gl. 2, S. 92 überein, wenn $k^2 = g:r$ gesetzt wird, bezeichnen daher eine elliptische Bewegung um den tiefsten Punkt der Kugel als Mittelpunkt und mit der Umlaufszeit (Gl. 10, S. 95)

$$t_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

(Vergl. auch S. 121/2, Fig. 101).

Auch der allgemeinere, S. 129—132 behandelte Fall führt, wie in Dr. Woldemar Voigt's Mechanik, S. 68 gezeigt wird, zu einer Bahnlinie, deren Horizontalprojektion Ähnlichkeit mit einer Ellipse hat, deren Hauptachsen sich aber fortgesetzt drehen.

E. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes.

Auf S. 48, Gl. 1, wurde gezeigt, dass die scheinbare oder relative Beschleunigung p_1 eines Punktes in Bezug auf einen beliebig bewegten Raum zu finden ist als geometrische Summe der wahren oder absoluten Beschleunigung p und zweier Ergänzungsbeschleunigungen $(-p_2)$ und $(-p_3)$. Davon bedeutet p_2 die Beschleunigung, mit welcher sich diejenige Stelle A der scheinbaren Bahnlinie bewegt, an welcher sich der Massenpunkt augenblicklich, d. h. im Zeitpunkte t, befindet; $(-p_2)$ ist das Entgegengesetzte von p_2. Ferner ist nach S. 40 $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \sin\alpha$, wenn w die augenblickliche scheinbare Geschwindigkeit, ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die scheinbare Bahnlinie um die durch den Punkt A derselben gelegt gedachte augenblickliche Drehachse dreht, α der Winkel, den diese Achse mit der scheinbaren Bahnlinie bildet. Ist AB das während des folgenden Zeittheilchens dt beschriebene