Lässt man den schweren Punkt aber die Sehne $AB = a\sqrt{4+\pi^2}$ durchlaufen, so ist seine Beschleunigung

$$p = g \cdot \sin \alpha = g \cdot \frac{2a}{AB}$$

und, weil $AB = \frac{pt_2^{\,2}}{2}$, die Zeit

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{p} \cdot AB} = \sqrt{\frac{2\,AB \cdot AB}{g \cdot 2a}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \sqrt{4+\pi^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}}\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}} = 1{,}186 \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

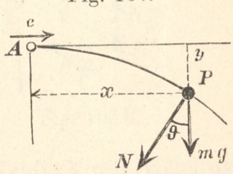
Das Durchlaufen der Geraden $\overline{AB}$ erfordert also 1,186 mal so viel Zeit wie das Durchlaufen der Cykloidenhälfte $\overset{\frown}{AB}$.

5. Bewegung eines schweren Punktes in einer Parabel mit lothrechter Achse.

Der Punkt sei gezwungen, sich auf der Parabel AP (Fig. 107) vom Parameter a zu bewegen und habe im Punkt A die Geschwindigkeit c, bei P die Geschwindigkeit (nach 1. Theil, S. 67)

$$v = \sqrt{c^2 + 2g \cdot y};$$

Fig. 107.



es soll der Normalwiderstand N in P berechnet werden.

Aus der Parabelgleichung

$x^2 = 2a \cdot y$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{2y}{a}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a},$$

daher der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx}} = p\left(1+\frac{2y}{a}\right)^{3/2}.$$

Daher wird mittels der Formel für die Centripetalbeschleunigung (s. S. 7)

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{c^2 + 2gy}{p\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}} = \frac{N + mg\cos\vartheta}{m}, \quad \text{also, weil}$$

$$\cos\vartheta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2y}{a}}},$$

$$N = m\left\{\frac{c^2 + 2gy}{p\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}} - \frac{g}{\sqrt{1 + \frac{2y}{a}}}\right\}$$

$$N = \frac{m}{\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}}\left\{\frac{c^2}{a} + \frac{2gy}{a} - g\left(1 + \frac{2y}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{mg}{\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}}\left(\frac{c^2}{ga} - 1\right).$$

Für $c^2 = g \cdot a$ wird durchweg $N = 0$, d. h. der Massenpunkt bedarf in diesem Fall einer Stützung Seitens der Bahn nicht, durchläuft dieselbe vielmehr als freie Bahnlinie.

Bekanntlich ist ja für die freie Bewegung eines mit der Geschwindigkeit c wagerecht geworfenen Punktes (1. Theil, S. 50)

$$x = ct; \quad y = {}^1\!/_2\, g t^2, \quad \text{mithin}$$

$$y = \frac{gx^2}{2c^2} \quad \text{oder}$$

$$x^2 = 2\frac{c^2}{g}y,$$

was eine parabolische Bahnlinie mit dem Parameter $a = \frac{c^2}{g}$ bedeutet und mit obiger Bedingung $c^2 = g \cdot a$ für $N = 0$ übereinstimmt.