Da dies mit Gl. 2, S. 53 übereinstimmt, wenn man

$$k^2 = g : r$$

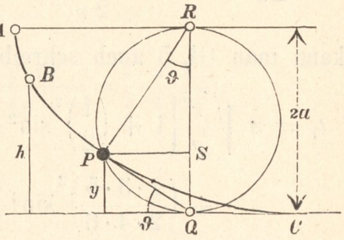
setzt, so ist eine Pendel-Bewegung von geringem Ausschlage nach den Gesetzen einer geradlinigen Schwingungsbewegung zu betrachten; man erhält für die Dauer einer einfachen Schwingung nach Gl. 7, S. 55 auch auf diese Weise

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

4. Das Cykloidenpendel.

Ist der Massenpunkt gezwungen, sich unter Einwirkung der Schwere auf einer Cykloide zu bewegen (Fig. 102), so nennt man die Vorrichtung ein Cykloidenpendel. Die Cykloide ABC sei dadurch entstanden, dass der Kreis vom Halbmesser a auf der oberen Wagerechten AR rollt. In B sei die Geschwindigkeit Null gewesen; zu beliebiger Zeit t befinde sich der Punkt in P. Dann ist (vergl. S. 20), wenn QR den lothrechten Durchmesser des erzeugenden Kreises bezeichnet, PQ die Tangente, PR die Normale der Cykloide.

Fig. 102.



Um zunächst den Normalwiderstand N zu finden, bedenke man, dass (S. 41) der Krümmungshalbmesser der Cykloide $\varrho = 2\,PR$ ist, also weil

$$PR = \sqrt{RQ \cdot RS} = \sqrt{2\,a(2\,a - y)} \quad \text{und}$$

$$1) \qquad \cos \vartheta = \frac{PR}{QR} = \frac{\sqrt{2\,a(2\,a - y)}}{2\,a} = \sqrt{\frac{2\,a - y}{2\,a}},$$

nach Gl. I, S. 117 stattfindet:

$$N = mg\left\{\frac{\sqrt{2\,a - y}}{\sqrt{2\,a}} + \frac{h - y}{\sqrt{2\,a(2\,a - y)}}\right\},$$

$$2) \qquad N = mg\frac{h + 2(a - y)}{\sqrt{2\,a(2\,a - y)}}.$$

Für $y = h$ wird

$$N_0 = mg\sqrt{1 - \frac{h}{2a}};$$

begänne die Bewegung im Punkt A, so würde dort, mit $h = 2a$, $N_0 = 0$ sein.

Beim Kreispendel wird N am grössten im tiefsten Punkte (s. 1. Theil, S, 67), weil dort $\vartheta = 0$, v am grössten, ϱ überall gleich ist. Beim Cykloidenpendel aber, ist im tiefsten Punkte ϱ am grössten, daher nicht ohne Weiteres selbstverständlich, dass dort N am grössten werden muss. Aus Gl. 2 wird nach entsprechender Vereinfachung

$$3)\quad \frac{dN}{dy} = \frac{mg}{\sqrt{2a}} \frac{{}^1\!/_2 h - 3a + y}{(2a - y)^{3/2}}.$$

Da der Nenner für den hier vorliegenden Fall $(y \leqq 2a)$ stets positiv, so ist

$$\frac{dN}{dy} \gtreqless 0, \quad \text{wenn} \quad \frac{h}{2} + y - 3a \gtreqless 0.$$

Da nun ${}^1\!/_2 h \leqq a$ und auch $y \leqq 2a$, so wird überall $\frac{dN}{dy} < 0$, d. h. es wird mit abnehmendem y die Druckkraft N stetig grösser, und man erhält für $y = 0$

$$4)\quad N_{max} = mg\left(1 + \frac{h}{2a}\right).$$

Zur Berechnung der Schwingungsdauer t_1 wird Gl. II, S. 117 mit

$$ds = -\frac{dy}{\sin\vartheta} \quad \text{und}$$

$$\sin\vartheta = \frac{PQ}{2a} = \frac{\sqrt{2a \cdot y}}{2a} = \sqrt{\frac{y}{2a}},$$

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{y}} \frac{dy}{\sqrt{h - y}} = -\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}},$$

also für die Bewegung von B bis C

$$\frac{t_1}{2} = -\sqrt{\frac{a}{g}} \int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}},$$

mithin die ganze Dauer einer Schwingung

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

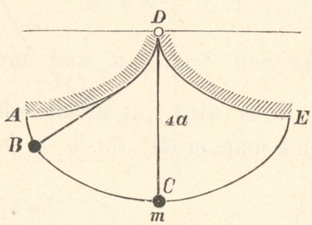
Das Integral hat nach Gl. 3, S. 119, den Werth π, daher kann man schreiben

5) $$t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4a}{g}},$$

d. h. die Schwingungsdauer eines gegebenen Cykloidenpendels ist völlig unabhängig von der Grösse des Schwingungsbogens, was beim Kreispendel nur für kleine Schwingungen gilt.

Dieses Pendel lässt sich am einfachsten dadurch verwirklichen, dass man (Fig. 103) zwei Cykloidenhälften vom Rollkreishalbmesser a als Schienen oder dergl. AD und DE körperlich ausbildet, in D einen unten mit einem dichten Körper m beschwerten biegsamen Faden von der Länge $4a$ befestigt und den Körper m in Bewegung setzt. Da die Evolvente der Cykloidenhälften AD und DE eine gleiche Cykloide ACE ist, so wird der Körper m in der Cykloide ACE schwingen, weil der in D befestigte Faden sich gegen die Evolute ADE legen wird. Die Fadenlänge $4a$ erscheint auch in Gl. 4 als Schwingungslänge.

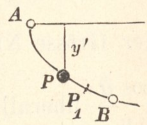
Fig. 103.



Professor Stampfer in Wien hat ein solches Cykloidenpendel für eine Thurmuhr der Stadt Lemberg verwendet. Diese Verwirklichung des Cykloidenpendels, überhaupt die Lehre von seinen Eigenschaften rührt schon von Huyghens (vergl. 1. Theil, S. 35) her, der die Lehre von den Evoluten und Evolventen, die Theorie der Kettenlinie begründete, die Theorie des Pendels ausbildete, auch die Optik und ihre Anwendung auf die Astronomie erheblich förderte.

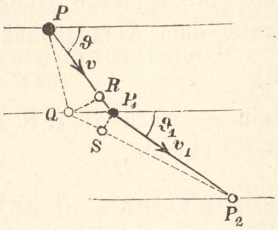
Die Cykloide ist auch die Linie des schnellsten Falles zwischen zwei nicht in derselben Lothrechten befindlichen Punkten, die sog. Brachistochrone (von $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ = kürzeste und $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ = Zeit), d. h. wenn ein schwerer Punkt in kürzester Zeit von A nach B gelangen soll (Fig. 104), so muss man ihn längs einer Cykloide APB gleiten lassen, deren Rollgerade eine durch A gelegte Wagerechte ist.

Fig. 104.



Dies lässt sich (nach Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte) in folgender Art beweisen: Ist die Kurve AB die Linie des schnellsten Falles zwischen den Punkten A und B, so muss sie es auch zwischen je zwei zwischenliegenden Punkten P und P_1 sein; man würde sonst den Bogen PP_1 der Kurve mit einem Stück einer anderen Kurve vertauschen können, auf welchem der Punkt in kürzerer Zeit von P nach P_1 gelangte, und in Folge dessen würde die Zeit der Bewegung von A nach B auf der ursprünglichen Kurve nicht die kürzeste sein.

Fig. 105.



Sind P, P_1, P_2 (Fig. 105) drei Nachbarpunkte der Kurve, ist v die Geschwindigkeit im Punkte P, v_1 diejenige im Punkte P_1, so kann man v für PP_1 und v_1 für P_1P_2 als gleichbleibend ansehen. Die Zeit zum Durchlaufen von PP_1P_2 ist dann

$$\frac{PP_1}{v} + \frac{P_1P_2}{v_1}.$$

Würde anstatt P_1 der Punkt Q derselben Wagerechten in unendlich kleinem Abstande dx von P_1 gewählt, so würde PQP_2 in der Zeit

$$\frac{PQ}{v} + \frac{QP_2}{v_1}$$

durchlaufen. Macht man $PR = PQ$, $P_2S = P_2P_1$, so kann man die beiden Zeiten auch schreiben

$$\frac{PP_1}{v} + \frac{P_2S}{v_1} \quad \text{und} \quad \frac{PR}{v} + \frac{QP_2}{v_1},$$

der Unterschied beträgt dann

$$\frac{P_1R}{v} - \frac{QS}{v_1} \quad \text{oder} \quad P_1Q\left(\frac{\cos\vartheta}{v} - \frac{\cos\vartheta_1}{v_1}\right),$$

wenn ϑ und ϑ_1 die Neigungswinkel der Bahnstrecken PP_1 und $P_1 P_2$ gegen die Wagerechte sind. — Soll nun die Zeit zum Durchlaufen der Strecke $PP_1 P_2$ ein Minimum sein, so muss die unendlich kleine Verschiebung des Punktes P_1 nach Q eine Aenderung der Zeit von der Grösse Null hervorbringen, d. h. es muss $\frac{\cos\vartheta}{v} = \frac{\cos\vartheta_1}{v_1}$, oder $\frac{\cos\vartheta}{v}$ überall gleich, die Geschwindigkeit v proportional dem Cosinus des Gefällwinkels ϑ der Kurve sein. Man setze also $\cos\vartheta = v \cdot \text{Const.}$ Zu Anfang, wo v noch $=$ Null ist, muss also auch $\cos\vartheta = 0$, d. h. $\vartheta = 90^0$ sein, d. h. die Kurve muss mit lothrechter Richtung beginnen. Es ist nun nach S. 117 $v = \sqrt{2gy'}$, wobei y' die durchsunkene Höhe, d. h. die Tiefe des beliebigen Punktes unter dem Anfangspunkt A der Bewegung bedeutet; es muss also

6) $$\cos\vartheta = \text{Const.}\sqrt{2gy'} = C_1\sqrt{y'}$$

sein. — Nach Gl. 1, S. 122, ist aber eine kennzeichnende Eigenschaft der Cykloide:

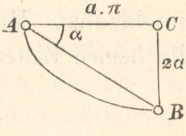
$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{2a - y}{2a}},$$

oder, wenn man nach dem Obigen die Tiefe des Punktes P in Fig. 104 unter der Stelle A, wo die Kurve lothrecht ist, mit y' bezeichnet, d. h. $2a - y = y'$ setzt,

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{y'}{2a}},$$

was mit der nothwendigen Bedingung 6 der Brachistochrone übereinstimmt; mithin ist die durch die gegebenen Punkte A und B (Fig. 104) gelegte Cykloide mit der Spitze in A die Linie des schnellsten Falles zwischen A und B.

Fig. 106.



Liegen z. B. die beiden Punkte A und B (Fig. 106) so gegen einander, dass man zwischen dieselben gerade eine halbe Cykloide legen kann mit $AC = a\pi$, $BC = 2a$, so gebraucht ein schwerer Punkt zum Durchlaufen der Cykloidenhälfte nach Gl. 5 die Zeit

$$\frac{t_1}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Lässt man den schweren Punkt aber die Sehne $AB = a\sqrt{4 + \pi^2}$ durchlaufen, so ist seine Beschleunigung

$$p = g \cdot \sin \alpha = g \cdot \frac{2a}{AB}$$

und, weil $AB = \frac{p t_2^{\,2}}{2}$, die Zeit

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{p} \cdot AB} = \sqrt{\frac{2\,AB \cdot AB}{g \cdot 2a}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \sqrt{4 + \pi^2}$$

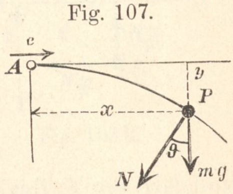
$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}}\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} = 1{,}186 \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Das Durchlaufen der Geraden $\overline{AB}$ erfordert also 1,186 mal so viel Zeit wie das Durchlaufen der Cykloidenhälfte $\widehat{AB}$.

5. Bewegung eines schweren Punktes in einer Parabel mit lothrechter Achse.

Der Punkt sei gezwungen, sich auf der Parabel AP (Fig. 107) vom Parameter a zu bewegen und habe im Punkt A die Geschwindigkeit c, bei P die Geschwindigkeit (nach 1. Theil, S. 67)

Fig. 107.



$$v = \sqrt{c^2 + 2g \cdot y};$$

es soll der Normalwiderstand N in P berechnet werden.

Aus der Parabelgleichung

$$x^2 = 2a \cdot y \quad \text{folgt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{2y}{a}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a},$$

daher der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx}} = p\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}.$$