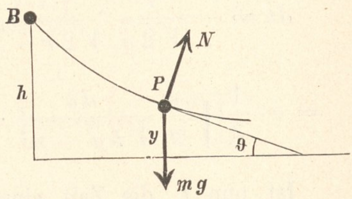
2. Reibungslose Bewegung eines Massenpunktes unter Einwirkung der Schwere auf einer in lothrechter Ebene befindlichen Bahnlinie.

In diesem Falle verrichtet nur die Schwere eine Arbeit, so dass wagerechte Linien Niveaulinien darstellen (s. S. 91).

Fig. 99.



Liegt die Stelle B, an der die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null begann, um h über der x-Achse, so gilt für die Geschwindigkeit v in der Höhe y:

$$v^2 = 2g(h - y).$$

Hat die Bahnlinie hier die Neigung ϑ gegen die Wagerechte, so muss

$$\frac{mv^2}{\varrho} = N - mg\cos\vartheta, \quad \text{also}$$

$$N = mg\cos\vartheta + \frac{2mg}{\varrho}(h - y) \quad \text{oder}$$

I $$N = mg\left(\cos\vartheta + 2\frac{h-y}{\varrho}\right) \quad \text{sein.}$$

Für die Bewegung findet man

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-y)}, \quad \text{also}$$

II $$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{ds}{\sqrt{h-y}}.$$

3. Das Kreispendel.

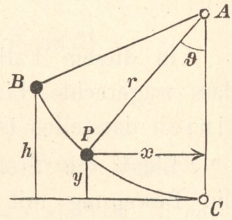
Im 1. Theile wurde auf S. 76—78 der Normalwiderstand schon vollständig behandelt, die Schwingungsdauer aber nur für kleine Schwingungen; hier soll die Aufgabe auch für beliebig grosse Schwingungen durchgeführt werden (Fig. 100).

Es ist, weil bei der Bewegung von B nach C die Ordinate y abnimmt,

$$ds = -dy : \sin\vartheta,$$

$$\sin\vartheta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{y}\cdot\sqrt{2r - y},$$

Fig. 100.



daher (Gl. II):

$$dt = -\frac{r}{\sqrt{2g}}\,\frac{dy}{\sqrt{2r - y}\,\sqrt{hy - y^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\,\frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}\cdot\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}.$$

Ist nun t_1 die Zeit einer einfachen Schwingung, so wird der Weg BC in der Zeit $1/2\, t_1$ zurückgelegt, wofür gilt

$$\frac{t_1}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}\cdot\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}, \quad \text{oder}$$

1) $$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}.$$

Der letzte Faktor wird nach der binomischen Reihe entwickelt:

$$\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{y}{2r} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{y}{2r}\right)^3 + \cdots$$

oder $$\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{y}{2r} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{y}{2r}\right)^3 + \cdots$$

Hiermit ergiebt sich aus Gl. 1 die Reihe von Integralen:

2) $$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\left\{\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r}\int_0^h \frac{y\cdot dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{2r}\right)^2\int_0^h \frac{y^2\,dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{2r}\right)^3\int_0^h \frac{y^3\,dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \cdots\right\}.$$

Das erste dieser Integrale ist sehr leicht zu lösen:

$$\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + hy - y^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}}$$

$$= \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2} - y\right)^2}} = \int_0^h \frac{dy}{\frac{h}{2}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2}}$$

$$= -\int_0^h \frac{d\left(1 - \frac{2y}{h}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2}} = \left[\arcsin\left(1 - \frac{2y}{h}\right)\right]_h^0$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = 2 \cdot \arcsin 1$$

3) $$= \pi .$$

Die übrigen Integrale lassen sich auf das erste zurückführen.

Um $\frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy - y^2}}$ zu integriren, theile man im Zähler und Nenner durch $\sqrt{y}$, so dass entsteht $\frac{y^{n-1/2}\,dy}{\sqrt{h - y}}$. Nun setze man

$$y^{n-1/2} = u; \quad \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = dv, \quad \text{dann ist}$$

$$(n - 1/2) \cdot y^{n-3/2}\,dy = du;$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\int (h-y)^{-1/2} d(h-y) = -2\sqrt{h-y} = v, \quad \text{und es wird}$$

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy - y^2}} = uv - \int v \cdot du = -2\,y^{n-1/2}\sqrt{h-y}$$

$$+ (2n-1)\int \sqrt{h-y} \cdot y^{n-3/2}\,dy$$

$$= -2\,y^{n-1}\sqrt{hy - y^2} + (2n-1)\int \frac{(h-y)}{\sqrt{hy-y^2}} \cdot y^{n-1}\,dy$$

oder $$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = -2\,y^{n-1}\sqrt{hy-y^2} + (2n-1)\,h\int \frac{y^{n-1} \cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}}$$

$$- (2n-1)\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}},$$

also, wenn man das letzte Glied auf die linke Seite bringt und durch $2n$ theilt:

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = -\frac{1}{n}\,y^{n-1}\cdot\sqrt{hy-y^2} + \frac{2n-1}{2n}\cdot h\int\frac{y^{n-1}\cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}}.$$

Nimmt man dies zwischen den Grenzen 0 und h, so wird das erste Glied der rechten Seite Null, und man erhält

$$4)\qquad \int_0^h \frac{y^n\cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{2n-1}{2n}\cdot h\int_0^h\frac{y^{n-1}\cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}}.$$

Dies ist die allgemeine Zurückführungsformel für Gl. 2.

$n=1$ giebt $\displaystyle\int_0^h\frac{y\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{1}{2}\,h\int_0^h\frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{1}{2}\,h\cdot\pi$ nach Gl. 3.

$n=2$ giebt $\displaystyle\int_0^h\frac{y^2\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{3}{4}\,h\int_0^h\frac{y\cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,h^2\pi.$

$n=3$ giebt $\displaystyle\int_0^h\frac{y^3\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{5}{6}\,h\int_0^h\frac{y^2\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,h^3\pi$

und so fort.

Hiermit wird Gl. 2:

$$5)\qquad t_1 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2r}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^3+\cdots\right\}.$$

Der Quotient des $(n+1)$ten Gliedes dieser Reihe durch das $n$te Glied ist

$$\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\frac{h}{2r}.$$

Da dieser Ausdruck mit wachsendem n sich mehr und mehr dem unter der Einheit liegenden Grenzwerth $\dfrac{h}{2r}$ nähert, so ist die Reihe konvergent.

Durchläuft der Massenpunkt den ganzen unteren Halbkreis, ist also $h=r$, so wird

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left\{1+\frac{1}{8}+\frac{9}{256}+\frac{225}{72\cdot 256}+\cdots\right\},$$

oder in Decimalbrüchen:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{1 + 0{,}125 + 0{,}0352 + 0{,}0122 + \cdots\right\}.$$

Dies giebt

6) $$t_1 = 1{,}180\,\pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Für nicht so grosse Schwingungen genügen die beiden ersten Glieder der Reihe in Gl. 5, nämlich

7) $$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{1}{8}\,\frac{h}{r}\right);$$

für kleine Schwingungen ergiebt sich, wie im ersten Theile,

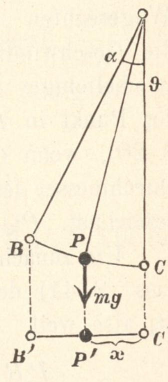
8) $$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da $$\frac{h}{2\,r} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

kann man Gl. 5 auch schreiben

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots\right\}.$$

Fig. 101.



Die Reihe liefert

für	$\alpha = 1^0$	den	Werth	1,000 019,
„	$\alpha = 5^0$	„	„	1,000 476,
„	$\alpha = 10^0$	„	„	1,001 907,
„	$\alpha = 20^0$	„	„	1,007 670.

Betrachtet man für kleine Schwingungen die kreisförmige Bahnlinie als übereinstimmend mit ihrer Horizontalprojektion (Fig. 101), so ist, weil die Tangentialbeschleunigung

$$p_t = g \sin\vartheta = g \cdot \frac{x}{r}$$

beträgt, aber im Sinne einer Abnahme von x gerichtet ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{r}\cdot x.$$

Da dies mit Gl. 2, S. 53 übereinstimmt, wenn man

$$k^2 = g : r$$

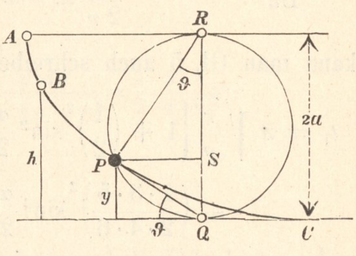
setzt, so ist eine Pendel-Bewegung von geringem Ausschlage nach den Gesetzen einer geradlinigen Schwingungsbewegung zu betrachten; man erhält für die Dauer einer einfachen Schwingung nach Gl. 7, S. 55 auch auf diese Weise

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

4. Das Cykloidenpendel.

Ist der Massenpunkt gezwungen, sich unter Einwirkung der Schwere auf einer Cykloide zu bewegen (Fig. 102), so nennt man die Vorrichtung ein Cykloidenpendel. Die Cykloide ABC sei dadurch entstanden, dass der Kreis vom Halbmesser a auf der oberen Wagerechten AR rollt. In B sei die Geschwindigkeit Null gewesen; zu beliebiger Zeit t befinde sich der Punkt in P. Dann ist (vergl. S. 20), wenn QR den lothrechten Durchmesser des erzeugenden Kreises bezeichnet, PQ die Tangente, PR die Normale der Cykloide.

Fig. 102.



Um zunächst den Normalwiderstand N zu finden, bedenke man, dass (S. 41) der Krümmungshalbmesser der Cykloide $\varrho = 2\,PR$ ist, also weil

$$PR = \sqrt{RQ \cdot RS} = \sqrt{2\,a(2\,a - y)} \quad \text{und}$$

$$1) \qquad \cos\vartheta = \frac{PR}{QR} = \frac{\sqrt{2\,a(2\,a-y)}}{2\,a} = \sqrt{\frac{2\,a - y}{2\,a}},$$

nach Gl. I, S. 117 stattfindet:

$$N = mg\left\{\frac{\sqrt{2\,a - y}}{\sqrt{2\,a}} + \frac{h - y}{\sqrt{2\,a(2\,a - y)}}\right\},$$

$$2) \qquad N = mg\frac{h + 2(a - y)}{\sqrt{2\,a(2\,a - y)}}.$$