eine Widerstandskraft ausdrücken. Nachdem diese Widerstandskraft an dem Massenpunkt angebracht ist, kann seine Bewegung wie eine freie Bewegung behandelt werden.

Der Widerstand der vorgeschriebenen Bahnlinie kann zerlegt werden in einen **Normalwiderstand** N (rechtwinklig zur Bahnlinie) (vergl. 1. Theil, S. 65) und eine tangential gerichtete Kraft, den **Reibungswiderstand** $f \cdot N$, dessen Sinn stets der Bewegung entgegengesetzt ist (vergl. 1. Theil, S. 190); darin bedeutet f die Reibungsziffer (den Reibungs-Koëfficienten).

Der Normalwiderstand N ist zunächst unbekannt hinsichtlich seiner Grösse, seiner Richtung innerhalb der zur Bahnlinie winkelrechten Ebene und seines Sinnes; er tritt in solcher Grösse und Richtung, in solchem Sinne auf, wie erforderlich ist, damit der Massenpunkt sich längs der vorgeschriebenen Bahn bewege. N ist daher von der Form der Bahnlinie, von den gegebenen bewegenden Kräften K und der Anfangsgeschwindigkeit abhängig.

Während in den Fällen der freien Bewegung sämmtliche Kräfte gegeben waren, die Form der Bahnlinie und die Bewegung in derselben gesucht wurden, so bleibt in den Fällen der Bewegung auf vorgeschriebener Bahn die Aufsuchung dieser letzteren natürlich fort; es sind aufzusuchen der Normalwiderstand N und das Gesetz der Bewegung längs der Bahn. Es ist dazu erforderlich, die Kräfte nach tangentialer und normaler Richtung zu zerlegen und die Werthe der Tangential- und Centripetalbeschleunigung (s. S. 7) zu benutzen.

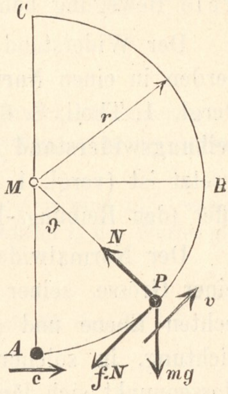
1. Bewegung eines Massenpunktes längs einer in lothrechter Ebene befindlichen Kreislinie unter Berücksichtigung der Reibung.

Der Massenpunkt m habe im tiefsten Punkt A des Kreises (Fig. 98) die Geschwindigkeit c. An der durch den Winkel ϑ bestimmten Stelle P sei die Geschwindigkeit v; es wirken die Kräfte mg, N und, der Bewegung entgegen, $f \cdot N$.

Als gesammte Centripetalkraft ergiebt sich $N - mg \cos \vartheta$, als Tangentialkraft im Sinne der Bewegung $-mg \sin \vartheta - fN$.

Daher wird nach S. 7 $m \cdot p_t = - mg \sin \vartheta - fN$ oder

Fig. 98.



1) $$p_t = \frac{dv}{dt} = - g \sin \vartheta - f \frac{N}{m};$$

$$p_n = \frac{v^2}{r} = \frac{N}{m} - g \cos \vartheta, \text{ also}$$

$$\frac{N}{m} = \frac{v^2}{r} + g \cos \vartheta$$

und hiermit aus Gl. 1:

$$\frac{dv}{dt} = - g(\sin \vartheta + f \cos \vartheta) - f \frac{v^2}{r}.$$

Multiplicirt man mit

$$2v \cdot dt = 2ds = 2r \cdot d\vartheta,$$

so ergiebt sich die Gleichung

2) $$2v \cdot dv = - 2gr(\sin \vartheta + f \cdot \cos \vartheta) d\vartheta - 2f \cdot v^2 d\vartheta,$$

aus der das Bewegungsgesetz entwickelt werden kann.

Setzt man behufs der Lösung vorübergehend

3) $$v^2 = y; \quad \vartheta = x,$$

so nimmt Gl. 2 die Form an:

$$\frac{dy}{dx} = - 2gr(\sin x + f \cdot \cos x) - 2f \cdot y \quad \text{und mit}$$

4) $$2gr(\sin x + f \cdot \cos x) = X:$$

5) $$\frac{dy}{dx} = - X - 2fy.$$

Zur Integration dieser Gleichung wird

6) $$y = u \cdot v, \quad \text{also} \quad dy = u \cdot dv + v \cdot du$$

eingeführt, wodurch entsteht:

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = - X - 2f \cdot u \cdot v, \quad \text{oder}$$

7) $$u\left(\frac{dv}{dx} + 2f \cdot v\right) + v\frac{du}{dx} = - X.$$

Man wählt nun den einen Faktor v in $u \cdot v = y$ derartig, dass in Gl. 7 das erste Glied verschwinde, d. h.

$$\frac{dv}{dx} = - 2f \cdot v, \quad \text{was}$$

8) $$v = C \cdot e^{-2fx} \quad \text{bedingt.}$$

Dann wird aus Gl. 7:

$$du = -\frac{X \cdot dx}{v} = -\frac{X \cdot e^{2f \cdot x}\, dx}{C}, \quad \text{also}$$

9) $$u = C_1 - \frac{1}{C}\int e^{2f \cdot x} X \cdot dx;$$

und aus Gl. 6 mit Hülfe von Gl. 8 und 9:

$$y = u \cdot v = C \cdot C_1 \cdot e^{-2f \cdot x} - e^{-2f \cdot x}\int e^{2f \cdot x} \cdot X \cdot dx,$$

oder wenn man $C \cdot C_1 = A$ und für X den Werth (Gl. 4) wieder einführt:

10) $$y = A \cdot e^{-2f \cdot x} - 2gr \cdot e^{-2f \cdot x}\int (\sin x + f \cdot \cos x)\, e^{2f \cdot x}\, dx.$$

Die beiden, nach Auflösung der Klammer im letzten Gliede entstehenden Integrale ermittelt man durch sog. theilweise Integration. Um

$$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx$$

zu finden, setzt man vorübergehend

$$u_1 = e^{2f \cdot x}; \quad dv_1 = \sin x \cdot dx; \quad \text{dann ist}$$

$$du_1 = 2f \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx; \quad v_1 = -\cos x, \quad \text{daher}$$

11) $$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx = u_1 \cdot v_1 - \int v_1 \cdot du_1 = -\cos x \cdot e^{2f \cdot x} + 2f\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x}\, dx.$$

Nunmehr wird geschrieben

$$u_2 = e^{2f \cdot x}; \quad dv_2 = \cos x \cdot dx; \quad \text{dann ist}$$

$$du_2 = 2f \cdot e^{2f \cdot x}\, dx; \quad v_2 = \sin x, \quad \text{mithin}$$

$$\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x}\, dx = u_2 \cdot v_2 - \int v_2 \cdot du_2 = \sin x \cdot e^{2f \cdot x} - 2f\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x}\, dx.$$

Die Einführung dieser Gleichung in Gl. 11 ergiebt

$$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x}\, dx = -\cos x \cdot e^{2f \cdot x} + 2f \cdot \sin x \cdot e^{2f \cdot x} - 4f^2\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x}\, dx,$$

somit

12) $$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x}\, dx = \frac{e^{2f \cdot x}}{1 + 4f^2}(2f \cdot \sin x - \cos x).$$

In derselben Weise findet man

13) $$\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x}\, dx = \frac{e^{2f \cdot x}}{1 + 4f^2}(2f \cdot \cos x + \sin x).$$

Mit Hülfe dieser Werthe wird Gl. 10, wenn man zugleich wieder y mit v^2, ϑ mit x vertauscht,

14) $$v^2 = e^{-2f \cdot \vartheta}\left\{A + 2gr\frac{e^{2f \cdot \vartheta}}{1 + 4f^2}\left[(1 - 2f^2)\cos\vartheta - 3f\sin\vartheta\right]\right\}.$$

Setzt man zur Ermittelung von A die Geschwindigkeit $v = c$ für $\vartheta = 0$, also

$$c^2 = 1\left\{A + 2gr\frac{1}{1+4f^2}(1-2f^2)\right\},$$

so ergiebt sich $$A = c^2 - \frac{2gr}{1+4f^2}(1-2f^2),$$ also Gl. 14):

15)
$$v^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{(1-2f^2)\cos\vartheta - 3f\cdot\sin\vartheta\right\}$$
$$+\left\{c^2 - \frac{2g\cdot r}{1+4f^2}(1-2f^2)\right\}e^{-2f\cdot\vartheta}.$$

So weit lässt sich die Aufgabe in einfacher Weise behandeln. Des Weiteren $v = r\cdot\frac{d\vartheta}{dt}$ zu setzen und daraus t als $f(\vartheta)$ zu entwickeln, ist in geschlossener Form nicht möglich.

Gl. 15 giebt die Geschwindigkeit v für jeden Werth von ϑ, d. h. für jede Stelle des Kreises. Auch kann man berechnen, wie gross die Anfangsgeschwindigkeit c genommen werden muss, damit der Punkt an einer bestimmten Stelle α mit der Geschwindigkeit Null anlange. Mit $v = 0$, $\vartheta = \alpha$ ergiebt nämlich Gl. 15;

16) $$c^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1 - 2f^2 - \left[(1-2f^2)\cos\alpha - 3f\cdot\sin\alpha\right]e^{2f\cdot\alpha}\right\}.$$

(Für $f = 0$ wird $c^2 = 2gr(1-\cos\alpha)$.)

Soll der Punkt gerade noch den Punkt B (Fig. 98) erreichen, so wird mit $\alpha = 90^0$:

17) $$c_1{}^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1 - 2f^2 + 3f\cdot e^{f\pi}\right\},$$

während der Endpunkt C (mit $\alpha = \pi$) die Geschwindigkeit c_2 bedingt, wobei

18) $$c_2{}^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1 - 2f^2 + (1-2f^2)e^{2f\pi}\right\} = \frac{2gr}{1+4f^2}(1-2f^2)\left(1+e^{2f\pi}\right)$$

ist.

Der Massenpunkt erlangt bei der Abwärtsbewegung die ursprüngliche Geschwindigkeit nicht wieder, da die Reibung mit der Umkehrung des Bewegungssinnes ebenfalls ihren Sinn wechselt, d. h. keine Funktion des Ortes ist, keiner Kräftefunktion entspricht (s. S. 91).

Beispiel: Für $f = 0{,}1$ wird (Gl. 17)

$$c_1{}^2 = 1{,}337\cdot 2gr;\quad c_1 = 1{,}156\sqrt{2gr};$$

(Gl. 18) $$c_2{}^2 = 2{,}70\cdot 2gr = 1{,}35\,(4gr);\quad c_2 = 1{,}162\sqrt{4gr}.$$