oder mit $\gamma = 1{,}2$; $F = 0{,}07306$; $\sin \varepsilon = 0{,}5$:

$$W = 0{,}00371 \cdot v^2 .$$

Für $W = mg = 455$ wird $v = k$ (Gleichgewichtsgeschwindigkeit), also

$$k = \sqrt{\frac{455}{0{,}00371}} = 350 \,\mathrm{m/s.}$$

Für eine Wurfweite $l = 8460^{\mathrm{m}}$ sollen der Höhenwinkel (Steigungswinkel) α und die Einzelseiten der Bewegung berechnet werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c = 630 \,\mathrm{m/s.}$.

Gl. 11 liefert für den Steigungswinkel $\alpha = 0{,}1740 =$ rund 10^0, was mit dem Schiessversuch übereinstimmt. Für die Gesammtdauer t_2 des Wurfes giebt Gl. 7 mit $x = 8460$:

$$t_2 = 19{,}14^{\mathrm{s.}}.$$

Die Geschwindigkeit $v = v_x$ bei B (Fig. 97) wird nach Gl. 6:

$$v_x = 630 \cdot e^{-\frac{gl}{k^2}} = 320 \,\mathrm{m/s.};$$

die Neigung β der Bahn nach Gl. 9:

$$\beta = -0{,}270 = -15{,}5^0 .$$

Der Scheitelpunkt der Bahn liegt nach Gl. 12 um $b = 4521^{\mathrm{m}}$ vom Ausgangspunkt entfernt und nach Gl. 10 in einer Höhe $h = 462^{\mathrm{m}}$. Die Zeit, nach welcher dieser Scheitelpunkt erreicht wird, beträgt nach Gl. 7: $t_1 = 9{,}12^{\mathrm{s.}}$; der abfallende Theil der Bahnlinie von 3739^{m} wagerechter Projektion wird in $t_2 - t_1 = 10{,}02^{\mathrm{s.}}$ zurückgelegt.

C. Bewegung eines Massenpunktes auf vorgeschriebener Bahnlinie.

Bei den vorstehenden Untersuchungen war der Massenpunkt nur gegebenen Kräften unterworfen und führte unter deren Einwirkung mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit eine freie Bewegung aus. Ist der Massenpunkt aber mit festen, unbeweglichen Körpern in Berührung, die ihm für seine Bewegung eine bestimmte Bahnlinie vorschreiben, ihn auf diese beschränken, so kann man diesen Zwang, diese Einwirkung auf die Bewegung des Punktes, durch eine Widerstandskraft ausdrücken. Nachdem diese Widerstandskraft an dem Massenpunkt angebracht ist, kann seine Bewegung wie eine freie Bewegung behandelt werden.

Der Widerstand der vorgeschriebenen Bahnlinie kann zerlegt werden in einen **Normalwiderstand** N (rechtwinklig zur Bahnlinie) (vergl. 1. Theil, S. 65) und eine tangential gerichtete Kraft, den **Reibungswiderstand** $f \cdot N$, dessen Sinn stets der Bewegung entgegengesetzt ist (vergl. 1. Theil, S. 190); darin bedeutet f die Reibungsziffer (den Reibungs-Koëfficienten).

Der Normalwiderstand N ist zunächst unbekannt hinsichtlich seiner Grösse, seiner Richtung innerhalb der zur Bahnlinie winkelrechten Ebene und seines Sinnes; er tritt in solcher Grösse und Richtung, in solchem Sinne auf, wie erforderlich ist, damit der Massenpunkt sich längs der vorgeschriebenen Bahn bewege. N ist daher von der Form der Bahnlinie, von den gegebenen bewegenden Kräften K und der Anfangsgeschwindigkeit abhängig.

Während in den Fällen der freien Bewegung sämmtliche Kräfte gegeben waren, die Form der Bahnlinie und die Bewegung in derselben gesucht wurden, so bleibt in den Fällen der Bewegung auf vorgeschriebener Bahn die Aufsuchung dieser letzteren natürlich fort; es sind aufzusuchen der Normalwiderstand N und das Gesetz der Bewegung längs der Bahn. Es ist dazu erforderlich, die Kräfte nach tangentialer und normaler Richtung zu zerlegen und die Werthe der Tangential- und Centripetalbeschleunigung (s. S. 7) zu benutzen.

I. Bewegung eines Massenpunktes längs einer in lothrechter Ebene befindlichen Kreislinie unter Berücksichtigung der Reibung.

Der Massenpunkt m habe im tiefsten Punkt A des Kreises (Fig. 98) die Geschwindigkeit c. An der durch den Winkel ϑ bestimmten Stelle P sei die Geschwindigkeit v; es wirken die Kräfte mg, N und, der Bewegung entgegen, $f \cdot N$.

Als gesammte Centripetalkraft ergiebt sich $N - mg \cos \vartheta$, als Tangentialkraft im Sinne der Bewegung $-mg \sin \vartheta - fN$.

Daher wird nach S. 7 $m \cdot p_t = - mg \sin \vartheta - fN$ oder

1) $$p_t = \frac{dv}{dt} = - g \sin \vartheta - f \frac{N}{m};$$

$$p_n = \frac{v^2}{r} = \frac{N}{m} - g \cos \vartheta, \text{ also}$$

$$\frac{N}{m} = \frac{v^2}{r} + g \cos \vartheta$$

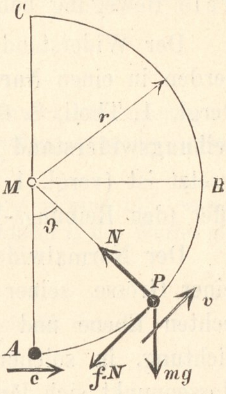


Fig. 98.

und hiermit aus Gl. 1:

$$\frac{dv}{dt} = - g(\sin \vartheta + f \cos \vartheta) - f \frac{v^2}{r}.$$

Multiplicirt man mit

$$2v \cdot dt = 2ds = 2r \cdot d\vartheta,$$

so ergiebt sich die Gleichung

2) $$2v \cdot dv = - 2gr(\sin \vartheta + f \cdot \cos \vartheta) d\vartheta - 2f \cdot v^2 d\vartheta,$$

aus der das Bewegungsgesetz entwickelt werden kann.

Setzt man behufs der Lösung vorübergehend

3) $$v^2 = y; \quad \vartheta = x,$$

so nimmt Gl. 2 die Form an:

$$\frac{dy}{dx} = - 2gr(\sin x + f \cdot \cos x) - 2f \cdot y \quad \text{und mit}$$

4) $$2gr(\sin x + f \cdot \cos x) = X:$$

5) $$\frac{dy}{dx} = - X - 2fy.$$

Zur Integration dieser Gleichung wird

6) $$y = u \cdot v, \quad \text{also} \quad dy = u \cdot dv + v \cdot du$$

eingeführt, wodurch entsteht:

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = - X - 2f \cdot u \cdot v, \quad \text{oder}$$

7) $$u\left(\frac{dv}{dx} + 2f \cdot v\right) + v\frac{du}{dx} = - X.$$

Man wählt nun den einen Faktor v in $u \cdot v = y$ derartig, dass in Gl. 7 das erste Glied verschwinde, d. h.

$$\frac{dv}{dx} = - 2f \cdot v, \quad \text{was}$$

8) $$v = C \cdot e^{-2fx} \quad \text{bedingt.}$$

Dann wird aus Gl. 7:

$$du = -\frac{X \cdot dx}{v} = -\frac{X \cdot e^{2f \cdot x} dx}{C}, \text{ also}$$

9) $$u = C_1 - \frac{1}{C}\int e^{2f \cdot x} X \cdot dx;$$

und aus Gl. 6 mit Hülfe von Gl. 8 und 9:

$$y = u \cdot v = C \cdot C_1 \cdot e^{-2f \cdot x} - e^{-2f \cdot x}\int e^{2f \cdot x} \cdot X \cdot dx,$$

oder wenn man $C \cdot C_1 = A$ und für X den Werth (Gl. 4) wieder einführt:

10) $$y = A \cdot e^{-2f \cdot x} - 2gr \cdot e^{-2f \cdot x}\int(\sin x + f \cdot \cos x)\, e^{2f \cdot x} dx.$$

Die beiden, nach Auflösung der Klammer im letzten Gliede entstehenden Integrale ermittelt man durch sog. theilweise Integration. Um

$$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx$$

zu finden, setzt man vorübergehend

$$u_1 = e^{2f \cdot x}; \quad dv_1 = \sin x \cdot dx; \text{ dann ist}$$

$$du_1 = 2f \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx; \quad v_1 = -\cos x, \text{ daher}$$

11) $$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx = u_1 \cdot v_1 - \int v_1 \cdot du_1 = -\cos x \cdot e^{2f \cdot x} + 2f\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} dx.$$

Nunmehr wird geschrieben

$$u_2 = e^{2f \cdot x}; \quad dv_2 = \cos x \cdot dx; \text{ dann ist}$$

$$du_2 = 2f \cdot e^{2f \cdot x} dx; \quad v_2 = \sin x, \text{ mithin}$$

$$\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} dx = u_2 \cdot v_2 - \int v_2 \cdot du_2 = \sin x \cdot e^{2f \cdot x} - 2f\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} dx.$$

Die Einführung dieser Gleichung in Gl. 11 ergiebt

$$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} dx = -\cos x \cdot e^{2f \cdot x} + 2f \cdot \sin x \cdot e^{2f \cdot x} - 4f^2\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} dx,$$

somit

12) $$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} dx = \frac{e^{2f \cdot x}}{1 + 4f^2}(2f \cdot \sin x - \cos x).$$

In derselben Weise findet man

13) $$\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} dx = \frac{e^{2f \cdot x}}{1 + 4f^2}(2f \cdot \cos x + \sin x).$$

Mit Hülfe dieser Werthe wird Gl. 10, wenn man zugleich wieder y mit v^2, ϑ mit x vertauscht,

14) $$v^2 = e^{-2f \cdot \vartheta}\left\{A + 2gr\frac{e^{2f \cdot \vartheta}}{1 + 4f^2}\left[(1 - 2f^2)\cos\vartheta - 3f\sin\vartheta\right]\right\}.$$

Setzt man zur Ermittelung von A die Geschwindigkeit $v = c$ für $\vartheta = 0$, also

$$c^2 = 1\left\{A + 2gr\frac{1}{1+4f^2}(1-2f^2)\right\},$$

so ergiebt sich $\quad A = c^2 - \frac{2gr}{1+4f^2}(1-2f^2)$, also Gl. 14):

$$15)\qquad v^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{(1-2f^2)\cos\vartheta - 3f\cdot\sin\vartheta\right\} + \left\{c^2 - \frac{2g\cdot r}{1+4f^2}(1-2f^2)\right\}e^{-2f\cdot\vartheta}.$$

So weit lässt sich die Aufgabe in einfacher Weise behandeln. Des Weiteren $v = r\cdot\frac{d\vartheta}{dt}$ zu setzen und daraus t als $f(\vartheta)$ zu entwickeln, ist in geschlossener Form nicht möglich.

Gl. 15 giebt die Geschwindigkeit v für jeden Werth von ϑ, d. h. für jede Stelle des Kreises. Auch kann man berechnen, wie gross die Anfangsgeschwindigkeit c genommen werden muss, damit der Punkt an einer bestimmten Stelle α mit der Geschwindigkeit Null anlange. Mit $v = 0$, $\vartheta = \alpha$ ergiebt nämlich Gl. 15;

$$16)\qquad c^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1 - 2f^2 - \left[(1-2f^2)\cos\alpha - 3f\cdot\sin\alpha\right]e^{2f\cdot\alpha}\right\}.$$

(Für $f = 0$ wird $c^2 = 2gr(1-\cos\alpha)$.)

Soll der Punkt gerade noch den Punkt B (Fig. 98) erreichen, so wird mit $\alpha = 90^0$:

$$17)\qquad c_1^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1 - 2f^2 + 3f\cdot e^{f\pi}\right\},$$

während der Endpunkt C (mit $\alpha = \pi$) die Geschwindigkeit c_2 bedingt, wobei

$$18)\qquad c_2^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1-2f^2+(1-2f^2)e^{2f\pi}\right\} = \frac{2gr}{1+4f^2}(1-2f^2)\left(1+e^{2f\pi}\right)$$

ist.

Der Massenpunkt erlangt bei der Abwärtsbewegung die ursprüngliche Geschwindigkeit nicht wieder, da die Reibung mit der Umkehrung des Bewegungssinnes ebenfalls ihren Sinn wechselt, d. h. keine Funktion des Ortes ist, keiner Kräftefunktion entspricht (s. S. 91).

Beispiel: Für $f = 0{,}1$ wird (Gl. 17)

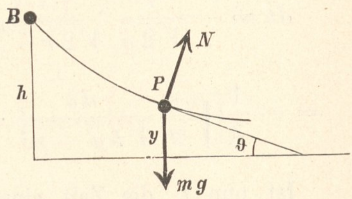
$$c_1^2 = 1{,}337\cdot 2gr;\quad c_1 = 1{,}156\sqrt{2gr};$$

(Gl. 18) $\quad c_2^2 = 2{,}70\cdot 2gr = 1{,}35\,(4gr);\quad c_2 = 1{,}162\sqrt{4gr}.$

2. Reibungslose Bewegung eines Massenpunktes unter Einwirkung der Schwere auf einer in lothrechter Ebene befindlichen Bahnlinie.

In diesem Falle verrichtet nur die Schwere eine Arbeit, so dass wagerechte Linien Niveaulinien darstellen (s. S. 91).

Fig. 99.



Liegt die Stelle B, an der die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null begann, um h über der x-Achse, so gilt für die Geschwindigkeit v in der Höhe y:

$$v^2 = 2g(h-y).$$

Hat die Bahnlinie hier die Neigung ϑ gegen die Wagerechte, so muss

$$\frac{mv^2}{\varrho} = N - mg\cos\vartheta, \quad \text{also}$$

$$N = mg\cos\vartheta + \frac{2mg}{\varrho}(h-y) \quad \text{oder}$$

I $$N = mg\left(\cos\vartheta + 2\frac{h-y}{\varrho}\right) \quad \text{sein.}$$

Für die Bewegung findet man

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-y)}, \quad \text{also}$$

II $$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{ds}{\sqrt{h-y}}.$$

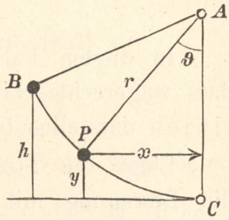
3. Das Kreispendel.

Im 1. Theile wurde auf S. 76—78 der Normalwiderstand schon vollständig behandelt, die Schwingungsdauer aber nur für kleine Schwingungen; hier soll die Aufgabe auch für beliebig grosse Schwingungen durchgeführt werden (Fig. 100).

Es ist, weil bei der Bewegung von B nach C die Ordinate y abnimmt,

$$ds = -dy : \sin\vartheta,$$

Fig. 100.



$$\sin\vartheta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{y}\cdot\sqrt{2r - y},$$

daher (Gl. II):

$$dt = -\frac{r}{\sqrt{2g}}\frac{dy}{\sqrt{2r - y}\sqrt{hy - y^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}\cdot\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}.$$

Ist nun t_1 die Zeit einer einfachen Schwingung, so wird der Weg BC in der Zeit $1/2\, t_1$ zurückgelegt, wofür gilt

$$\frac{t_1}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}\cdot\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}, \quad \text{oder}$$

1) $$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}.$$

Der letzte Faktor wird nach der binomischen Reihe entwickelt:

$$\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{y}{2r} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{y}{2r}\right)^3 + \cdots$$

oder $$\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{y}{2r} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{y}{2r}\right)^3 + \cdots$$

Hiermit ergiebt sich aus Gl. 1 die Reihe von Integralen:

2) $$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\left\{\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r}\int_0^h \frac{y\cdot dy}{\sqrt{hy - y^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{2r}\right)^2\int_0^h \frac{y^2\,dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{2r}\right)^3\int_0^h \frac{y^3\,dy}{\sqrt{hy - y^2}} + \cdots\right\}.$$

Das erste dieser Integrale ist sehr leicht zu lösen:

$$\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + hy - y^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}}$$

$$= \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2} - y\right)^2}} = \int_0^h \frac{dy}{\frac{h}{2}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2}}$$

$$= - \int_0^h \frac{d\left(1 - \frac{2y}{h}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2}} = \left[\text{arc sin}\left(1 - \frac{2y}{h}\right)\right]_h^0$$

$$= \text{arc sin } 1 - \text{arc sin}(-1) = 2 \cdot \text{arc sin } 1$$

3) $$= \pi .$$

Die übrigen Integrale lassen sich auf das erste zurückführen.

Um $\frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}}$ zu integriren, theile man im Zähler und Nenner durch $\sqrt{y}$, so dass entsteht $\frac{y^{n-1/2}\,dy}{\sqrt{h-y}}$. Nun setze man

$$y^{n-1/2} = u; \quad \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = dv, \quad \text{dann ist}$$

$$(n - 1/2) \cdot y^{n-3/2}\,dy = du;$$

$\int \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\int (h-y)^{-1/2} d(h-y) = -2\sqrt{h-y} = v$, und es wird

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = uv - \int v \cdot du = -2\,y^{n-1/2}\sqrt{h-y}$$

$$+ (2n-1)\int \sqrt{h-y} \cdot y^{n-3/2}\,dy$$

$$= -2\,y^{n-1}\sqrt{hy-y^2} + (2n-1)\int \frac{(h-y)}{\sqrt{hy-y^2}} \cdot y^{n-1}\,dy$$

oder $$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = -2\,y^{n-1}\sqrt{hy-y^2} + (2n-1)\,h\int \frac{y^{n-1} \cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}}$$

$$-(2n-1)\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}},$$