Für $r = \infty$ wird $V = 0$.

Bewegt sich ein Massenpunkt m aus einem Abstand r vom Centrum m_1 in unendlich grosse Entfernung, so ist die dabei verrichtete Arbeit

$$U_\infty - U = 0 - \frac{k m_1 m}{r} = V.$$

Das Potential V der von einem Centrum m_1 ausgehenden Anziehungskraft ist daher diejenige Arbeit, welche von der Kraft geleistet wird, wenn der Massenpunkt m aus dem Abstand r sich in unendliche Entfernung begiebt. Nach welcher Richtung und auf welchem Wege diese Bewegung erfolgt, ist nach S. 89 gleichgültig.

Ist für die Anfangslage des beweglichen Punktes die Geschwindigkeit c, der Abstand r_0, das Potential V_0, für die Endlage die Geschwindigkeit v, der Abstand r, das Potential V, so ist

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} = U - U_0 = V_0 - V, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{m v^2}{2} + V = \frac{m c^2}{2} + V_0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{m v^2}{2} + V$$

eine unveränderliche Grösse.

Die Niveauflächen sind Flächen gleichen Potentials (s. S. 90).

5. Wurfbewegung mit Luftwiderstand.

Legt man durch die Anfangsgeschwindigkeit c der Bewegung eine lothrechte Ebene, nimmt in dieser die AX wagerecht, die AY lothrecht nach oben, so muss die Bewegung in der Ebene XAY (Fig. 96) erfolgen, weil dieselbe die Anfangsgeschwindigkeit, sowie auch die Kräfte mg und den Widerstand $W = mg \cdot v^2 : k^2$ enthält (s. S. 74).

Es ergiebt sich dann, wenn ϑ der Neigungswinkel der Bahn an beliebiger Stelle ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{W}{m}\cos\vartheta = -\frac{g}{k^2}v^2 \cdot \cos\vartheta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{W}{m}\sin\vartheta = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2} \cdot \sin\vartheta\right).$$

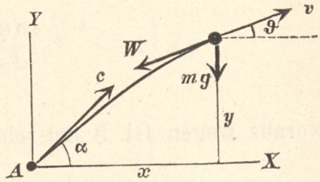
Setzt man nun

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad \cos\vartheta = \frac{dx}{ds}; \quad \sin\vartheta = \frac{dy}{ds}, \quad \text{so wird}$$

1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} \quad \text{und}$$

2) $$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\left(1 + \frac{1}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}\right).$$

Fig. 96.



Schreibt man Gl. 1:

$$\frac{\left(\frac{d^2x}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{g}{k^2}ds, \quad \text{so folgt}$$

$$\mathfrak{l}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{g}{k^2}s + \mathfrak{l}(c\cdot\cos\alpha) \quad \left(\text{weil } \frac{dx}{dt} = c\cdot\cos\alpha \text{ für } s = 0\right) \text{ und}$$

$$\mathfrak{l}\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{c\cdot\cos\alpha}\right) = -\frac{g}{k^2}s, \quad \text{oder}$$

3) $$\frac{dx}{dt} = v_x = c\cdot\cos\alpha\cdot e^{-\frac{g}{k^2}s}.$$

Führt man für die weitere Behandlung die Hülfsgrösse

$$\varphi = \frac{dy}{dx}$$

ein, so wird aus $dy = \varphi\cdot dx$, wenn man nach dt differentiirt und bedenkt, dass φ und dx beide von t abhängen:

$$d^2y = \varphi\cdot d^2x + dx\cdot d\varphi, \quad \text{also}$$

4) $$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Aus Gl. 2 wird aber, wenn man auch darin $dy = \varphi\cdot dx$ setzt:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\varphi\cdot\frac{dx}{dt},$$

oder, weil nach Gl. 1:

$$-\frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}:$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \varphi\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Verbindet man dies mit Gl. 4, so erhält man

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

also, wenn man beiderseits mit $dx : dt$ dividirt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

woraus wegen Gl. 3 entsteht:

5) $$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g}{c^2 \cos^2\alpha} \cdot e^{\frac{2g}{k^2}s}.$$

Die weitere Behandlung der Aufgabe ist nur mittels zeichnerischer Flächenermittelung oder mittels Hülfstabellen möglich. Ein näheres Eingehen auf diesen für die Militärwissenschaft sehr wichtigen Gegenstand liegt ausserhalb des Rahmens dieses Buches. Es möge hier auf das Compendium der theoretischen äusseren Ballistik, von Professor Dr. Cranz (Stuttgart), 1896, Verlag von B. G. Teubner (Leipzig) verwiesen werden.

Besonderer Fall einer flachen Wurfbahn.

Eine annähernde Lösung in geschlossener Form ergiebt sich für flache Wurfbahnen, bei denen man die Bogenlängen mit ihren wagerechten Projektionen vertauschen, also $ds = dx$; $s = x$; $\cos\alpha = 1$; $\cos\vartheta = 1$; $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$; $\operatorname{tg}\vartheta = \varphi = \vartheta$ setzen darf. Dann ergiebt Gl. 3:

6) $$v_x = \frac{dx}{dt} = c \cdot e^{-\frac{g}{k^2}x}, \quad \text{also}$$

$$dt = \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{g}{k^2}x} \cdot dx \quad \text{und daraus}$$

7) $$t = \frac{k^2}{c \cdot g}\left(e^{\frac{g}{k^2}x} - 1\right), \quad \text{oder}$$

8) $$x = \frac{k^2}{g} \cdot \mathfrak{l}\left(1 + \frac{g \cdot c}{k^2}t\right).$$

Aus Gl. 5 wird

$$d\varphi = d\vartheta = -\frac{g}{c^2} e^{\frac{2g}{k^2}x} dx \quad \text{und giebt}$$

9) $$\vartheta = \alpha - \frac{k^2}{2c^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right);$$

daher $$dy = \vartheta \cdot dx = \alpha \cdot dx - \frac{k^2}{2c^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right) dx$$

und durch Integration

10) $$y = x\left(\alpha + \frac{k^2}{2c^2}\right) - \frac{k^4}{4gc^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right).$$

Setzt man $y = 0$ und $x =$ der Wurfweite l, so wird aus Gl. 10, wenn man nach dem Steigungswinkel α auflöst:

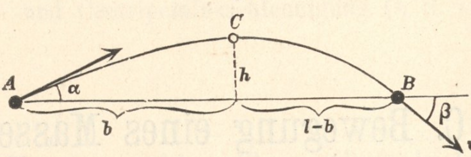
11) $$\alpha = \frac{k^4}{4g \cdot c^2 l}\left(e^{\frac{2g}{k^2}l} - 1\right) - \frac{k^2}{2c^2}.$$

Für den Scheitelpunkt C der Bahnlinie (Fig. 97) sei $x = b$, $y = h$; die Bedingung dafür ist $\vartheta = 0$; hiermit giebt Gl. 9, nach $x = b$ aufgelöst:

12) $$b = \frac{k^2}{2g}\mathfrak{l}\left(1 + \frac{2c^2}{k^2}\alpha\right).$$

Die Pfeilhöhe h der Wurfbahn findet man, indem man den Zahlenwerth von b in die Gl. 10 der Bahnlinie einsetzt; es ist dann $h = y$.

Fig. 97.



Die Zeiten t_1 und t_2, nach denen der Massenpunkt in C bezw. B angelangt ist, ergeben sich, wenn man in Gl. 7 für x die Werthe b bezw. l einführt.

Beispiel: Eine Kruppsche Kanone von $0{,}305^{\text{m}}$ lichter Weite, also $0{,}07306^{\text{qm}}$ Öffnungsquerschnitt, schiesst Granaten von 1^{m} Länge und 455^{kg} Gewicht. Die Granate hat eine annähernd kegelförmige Spitze, deren Kegelseite mit der Achse einen Winkel ε bildet, u. zw. ist ungefähr $\sin\varepsilon = 0{,}5$. Dann beträgt der Luftwiderstand nach 2. Theil, S. 356, Gl. 16 bei einer Geschwindigkeit v

$$W = 0{,}83\,\frac{\gamma}{g} F v^2 \sin\varepsilon,$$

oder mit $\gamma = 1{,}2$; $F = 0.07306$; $\sin \varepsilon = 0{,}5$:

$$W = 0{,}00371 \cdot v^2.$$

Für $W = mg = 455$ wird $v = k$ (Gleichgewichtsgeschwindigkeit), also

$$k = \sqrt{\frac{455}{0{,}00371}} = 350 \,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}.$$

Für eine Wurfweite $l = 8460^{\mathrm{m}}$ sollen der Höhenwinkel (Steigungswinkel) α und die Einzelseiten der Bewegung berechnet werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c = 630 \,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$.

Gl. 11 liefert für den Steigungswinkel $\alpha = 0{,}1740 =$ rund 10^0, was mit dem Schiessversuch übereinstimmt. Für die Gesammtdauer t_2 des Wurfes giebt Gl. 7 mit $x = 8460$:

$$t_2 = 19{,}14^{\mathrm{s.}}.$$

Die Geschwindigkeit $v = v_x$ bei B (Fig. 97) wird nach Gl. 6:

$$v_x = 630 \cdot e^{-\frac{gl}{k^2}} = 320 \,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}};$$

die Neigung β der Bahn nach Gl. 9:

$$\beta = -0{,}270 = -15{,}5^0.$$

Der Scheitelpunkt der Bahn liegt nach Gl. 12 um $b = 4521^{\mathrm{m}}$ vom Ausgangspunkt entfernt und nach Gl. 10 in einer Höhe $h = 462^{\mathrm{m}}$. Die Zeit, nach welcher dieser Scheitelpunkt erreicht wird, beträgt nach Gl. 7: $t_1 = 9{,}12^{\mathrm{s.}}$; der abfallende Theil der Bahnlinie von 3739^{m} wagerechter Projektion wird in $t_2 - t_1 = 10{,}02^{\mathrm{s.}}$ zurückgelegt.

C. Bewegung eines Massenpunktes auf vorgeschriebener Bahnlinie.

Bei den vorstehenden Untersuchungen war der Massenpunkt nur gegebenen Kräften unterworfen und führte unter deren Einwirkung mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit eine freie Bewegung aus. Ist der Massenpunkt aber mit festen, unbeweglichen Körpern in Berührung, die ihm für seine Bewegung eine bestimmte Bahnlinie vorschreiben, ihn auf diese beschränken, so kann man diesen Zwang, diese Einwirkung auf die Bewegung des Punktes, durch