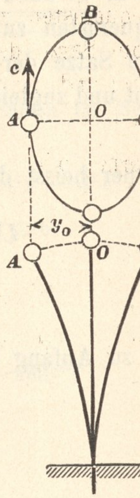
Diese Bewegung kommt, wenigstens annäherungsweise, vor, wenn die Kraft K durch den nach allen Richtungen gleichen Biegungswiderstand eines geraden elastischen Stabes von kreisförmigem Querschnitte geliefert wird. Der Stab sei unten lothrecht eingespannt (Figur 88) und trage oben eine Kugel, die so schwer ist, dass dagegen die Masse des Stabes vernachlässigt werden kann. Bringt man die Kugel um $y_0 = OA$ aus der Gleichgewichtslage O und ertheilt ihr etwa mit der Hand oder mittels eines Hammers eine Geschwindigkeit c in wagerechter Ebene, so wird der Mittelpunkt der Kugel die behandelte Ellipsenbewegung ausführen. Lässt man die Kugel einfach los ($c = 0$), so schwingt sie in einem schwachen Bogen AOC, und ihre wagerechte Seitenbewegung folgt annähernd den Gesetzen der geradlinigen Schwingung (S. 53).

Fig. 88.

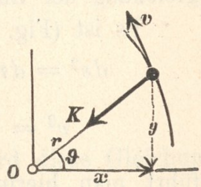


4. Bewegung der Himmelskörper unter Einwirkung der Massenanziehung nach dem Newton'schen Gesetze.

Für eine von einem Centralpunkt m_1 angezogene Masse m im Abstand r vom Centrum kann man (nach 1. Theil, S. 55) die Anziehungskraft

$$1)\qquad K = \frac{k \cdot m_1 m}{r^2} = \frac{mq}{r^2}$$

Fig. 89.



schreiben. Darin bedeutet k die Anziehungskraft zwischen zwei Masseneinheiten in dem Abstand $r = 1$, q die Anziehungsbeschleunigung der Masse m im Abstand $r = 1$ vom Centrum. Zerlegt man (Fig. 89) K in $K \cos \vartheta$ und $K \sin \vartheta$, so wird weil $r \cdot \cos \vartheta = x$, $r \cdot \sin \vartheta = y$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -q\frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -q\frac{y}{r^3}$$

oder mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -q\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -q\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich, weil sie beide x und y enthalten, nicht von einander unabhängig integriren, wie dies mit Gl. 2, S. 92 leicht geschehen konnte. Vielmehr gelangt man am bequemsten zur Gleichung der Bahnlinie, wenn man unmittelbar vom Satze der Flächen und vom Satze des Arbeitsvermögens ausgeht und zugleich Polarkoordinaten anwendet. Es ist nach Gl. 4, S. 86

2) $$r^2 \cdot d\vartheta = A \cdot dt.$$

Ferner heisst die Kräftefunktion dieses Falles nach Gl. 10. S. 91

$$U = \int K dr + C = -k m_1 m \int \frac{dr}{r^2} + C$$

$$= \frac{k \cdot m_1 m}{r} + C = \frac{mq}{r} + C.$$

Ist zu Anfang $r = r_0$ und $v = v_0$, so wird nach Gl. 8, S. 88

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0{}^2}{2} = \frac{mq}{r} - \frac{mq}{r_0}, \text{ also}$$

$$v^2 = \frac{2q}{r} - \left(\frac{2q}{r_0} - v_0{}^2\right),$$

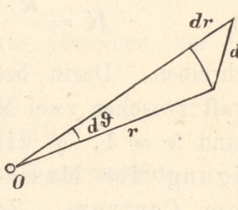
oder, wenn man den konstanten Werth

$$\frac{2q}{r_0} - v_0{}^2 = h \text{ setzt:}$$

3) $$v^2 = \frac{2q}{r} - h.$$

Gl. 2 und 3 müssen nun so umgewandelt werden, dass man aus ihnen nach Entfernung von t die Differentialgleichung der Bahnlinie erhält.

Fig. 90.



Es ist (Fig. 90)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2, \text{ also}$$

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{dt^2};$$

führt man hierin aus Gl. 2 den Werth $dt = \frac{r^2}{A} d\vartheta$ ein, so wird mit Benutzung von Gl. 3:

$$\frac{2q}{r} - h = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{r^4 d\vartheta^2} \cdot A^2,$$

oder, nach $d\vartheta$ aufgelöst:

4) $$d\vartheta = \frac{A \cdot dr}{\sqrt{2qr^3 - hr^4 - A^2r^2}}.$$

Zum Zwecke der Integration, setzt man $r = \frac{1}{u}$ mit $dr = -\frac{du}{u^2}$,

dann wird $d\vartheta = -\frac{A \cdot du}{u^2\sqrt{\frac{2q}{u^3} - \frac{h}{u^4} - \frac{A^2}{u^2}}} = -\frac{A \cdot du}{\sqrt{2qu - h - A^2u^2}}$.

Um das Glied mit der ersten Potenz der Veränderlichen im Nenner zu entfernen, setze man $u = z + b$; dann wird

$$2qu - h - A^2u^2 = 2qz + 2qb - h - A^2z^2 - 2bA^2z - A^2b^2.$$

Man wählt nun b derartig, dass $2qz - 2bA^2z = 0$ werde, d. h.

$$5) \qquad b = \frac{q}{A^2} \quad \text{und} \quad z = u - \frac{q}{A^2}.$$

Hiermit wird

$$2qu - h - Au^2 = \frac{2q^2}{A^2} - h - A^2z^2 - \frac{q^2}{A^2} \quad \text{und}$$

$$d\vartheta = -\frac{A\,dz}{\sqrt{\left(\frac{q^2}{A^2} - h\right) - A^2z^2}}.$$

Hieraus folgt das unbestimmte Integral

$$\vartheta = \arccos\frac{Az}{\sqrt{\frac{q^2}{A^2} - h}} = \arccos\frac{\frac{A^2}{q}z}{\sqrt{1 - h\frac{A^2}{q^2}}},$$

also wegen
$$z = u - \frac{q}{A^2} = \frac{1}{r} - \frac{q}{A^2}:$$

$$\vartheta - \alpha = \arccos\frac{\frac{A^2}{qr} - 1}{\sqrt{1 - h\frac{A^2}{q^2}}},$$

worin α die Integrationskonstante bedeutet. Wird diese Gleichung nach r aufgelöst, so erhält man

$$6) \qquad r = \frac{\frac{A^2}{q}}{1 + \sqrt{1 - \frac{hA^2}{q^2}} \cdot \cos(\vartheta - \alpha)}.$$

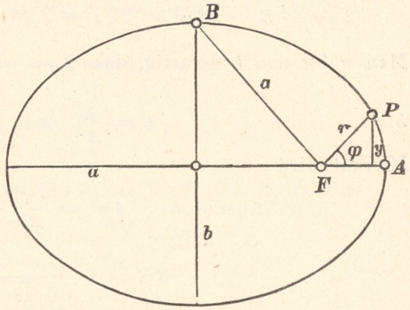
Dies ist die Polargleichung eines auf seinen Brennpunkt F als Pol bezogenen Kegelschnittes.

Geht man nämlich von der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

aus, so findet man (Fig. 91) den Brennpunkt F, indem man $BF = a$ macht. Der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte wird bekanntlich $= a \cdot \varepsilon$ gesetzt und ε die numerische Excentricität des Kegelschnitts genannt (für den Kreis würde $\varepsilon = 0$ sein). Hiermit und mit

Fig. 91.



7) $$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

wird die Mittelpunktsgleichung

8) $$y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Ist nun F der Pol, FA die Polarachse, so gilt für einen Punkt P, dessen Polarkoordinaten φ und r sind,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{y^2 + (x - a\varepsilon)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + \varepsilon^2 x^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2} = a - \varepsilon x; \end{aligned}$$

da ferner $$x = a \cdot \varepsilon + r \cdot \cos\varphi,$$

so wird $$r = a - a \cdot \varepsilon^2 - \varepsilon \cdot r \cos\varphi, \quad \text{also}$$

9) $$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Der Zähler $a(1 - \varepsilon^2)$ ist nämlich die dem Brennpunkt F entsprechende Ordinate und werde mit p bezeichnet; denn $x = a\varepsilon$ giebt nach Gl. 8:

$$y = a(1 - \varepsilon^2).$$

Bei der Ellipse ist b reell, daher $b^2 > 0$, also nach Gl. 7

$$(1 - \varepsilon^2) > 0, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon^2 < 1.$$

Die Hyperbel unterscheidet sich von der Ellipse dadurch, dass b imaginär, b^2 negativ, nach Gl. 7 somit

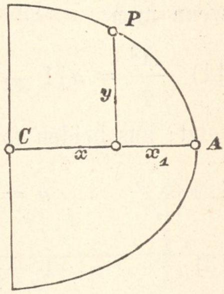
$$(1 - \varepsilon^2) < 0, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon^2 > 1 \quad \text{ist.}$$

Lässt man ε^2 durch stetige Änderung von Werthen < 1 zu Werthen > 1 übergehen, so hat man in dem Zwischenwerth

$$\varepsilon^2 = 1$$

den Übergangsfall zwischen Ellipse und Hyperbel, der als Grenzfall sowohl der Ellipse wie der Hyperbel zugerechnet werden kann. Damit nun für $\varepsilon^2 = 1$ der Brennstrahl r in Gl. 9 nicht zu Null werde, muss offenbar $a = \infty$ sein. Daher ist die Parabel derjenige Kegelschnitt, dessen Excentricität $\varepsilon = 1$ und dessen grosse Halbachse a unendlich gross ist.

Fig. 92.



Dass hierfür thatsächlich die Ellipsengleichung in die Parabelgleichung übergeht, ergiebt sich leicht; nur muss man, damit der Anfangspunkt der Koordinaten nicht in unendliche Ferne gehe, die Scheitelgleichung der Ellipse benutzen. Vertauscht man (Fig. 92) in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

x mit $a - x_1$, b^2 mit $a^2(1 - \varepsilon^2)$, so wird

$$\frac{(a - x_1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1$$

und daraus $\quad y^2 = 2a(1 - \varepsilon^2)x_1 - (1 - \varepsilon^2)x_1{}^2.$

Soll dies in die Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2px$ übergehen, so muss

$$\varepsilon^2 = 1 \quad \text{und} \quad a(1 - \varepsilon^2) = p, \quad \text{d. h.} \quad a = \infty \quad \text{werden.}$$

Gl. 9 bezeichnet daher eine

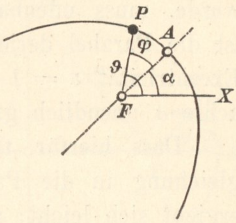
$$10) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{Ellipse,} & \text{wenn} & 1 - \varepsilon^2 > 0, \\ \text{Parabel,} & „ & 1 - \varepsilon^2 = 0, \\ \text{Hyperbel,} & „ & 1 - \varepsilon^2 < 0. \end{array} \right.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass Gl. 6 mit Gl. 9 im Wesentlichen übereinstimmt. Bei Gl. 6 fällt die Polarachse nicht mit der grossen Halbachse a der Ellipse zusammen, sondern liegt um den Winkel α dagegen verdreht. Denn nicht für $\vartheta = 0$, sondern für $\vartheta = \alpha$

erreicht $\cos(\vartheta - \alpha)$ seinen grössten Werth, daher r seinen kleinsten Werth FA. Vertauscht man (Fig. 93) $\vartheta - \alpha$ mit φ, so ist die Uebereinstimmung zwischen den Gl. 6 und 9 hinsichtlich der Veränderlichen erreicht.

Die Bedeutung der Konstanten der Gl. 6 für die Bahnlinie der entsprechenden Bewegung ergiebt sich nun, wenn man

Fig. 93.



11) $$\frac{A^2}{q} = a(1 - \varepsilon^2); \quad 1 - \frac{hA^2}{q^2} = \varepsilon^2$$

setzt; aus beiden folgt

12) $$a = \frac{q}{h} \quad \text{und}$$

13) $$1 - \varepsilon^2 = h\frac{A^2}{q^2}.$$

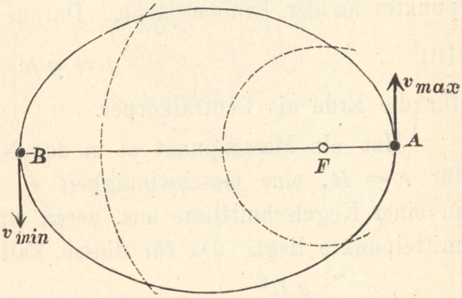
Da $\frac{A^2}{q^2}$ stets positiv, so ist $1 - \varepsilon^2 \gtreqless 0$ wenn $h \gtreqless 0$ ist.

Nach Gl. 3 war nun aber $h = \frac{2q}{r} - v^2$, so dass das Vorzeichen von h, also auch dasjenige von $1 - \varepsilon^2$, abhängt von $2q - rv^2$. Eine elliptische Bahnlinie verlangt $1 - \varepsilon^2 > 0$, d. h. $h > 0$, also $2q > v^2 r$. Da nun $q = k \cdot m_1$ für einen gegebenen Centralpunkt eine konstante Grösse ist, so darf der Massenpunkt in einem Abstand r vom Centrum nur eine solche Geschwindigkeit v haben, dass $rv^2 < 2q$ ist, wenn eine e l l i p t i s c h e Bahnlinie entstehen soll. Damit die Bahnlinie aber im Besonderen k r e i s f ö r m i g werden könne, muss die Anziehungs-Beschleunigung $\frac{q}{r^2}$ der erforderlichen Centripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{r}$ gleich sein, d. h. $rv^2 = q$. Für $rv^2 = 2q$ wird $h = 0$, $\varepsilon^2 = 1$, die Bahnlinie eine P a r a b e l; für $rv^2 > 2q$ wird $h < 0$, $\varepsilon^2 > 1$, die Bahnlinie eine H y p e r b e l; oder, zusammengestellt, die Bahnlinie wird

14) $$\begin{cases} \text{ein Kreis} & \text{für } v^2 r = q, \\ \text{eine Ellipse} & \text{„ } v^2 r < 2q, \\ \text{„ Parabel} & \text{„ } v^2 r = 2q, \\ \text{„ Hyperbel} & \text{„ } v^2 r > 2q. \end{cases}$$

Bekommt also der Massenpunkt m in einem Abstand r vom Centrum die Geschwindigkeit v etwa durch einen Stoss, eine Explosion oder dergl. so hängt es nur von der Grösse der Geschwindigkeit ab, ob er eine geschlossene Ellipse mit dem Centrum als Brennpunkt beschreibt, oder in einer hyperbolischen Bahnlinie in unendliche Ferne geht. Diese Fälle einer elliptischen Bahnlinie unterscheiden sich von der auf S. 92 behandelten elliptischen Bewegung dadurch, dass das Centrum dort den Mittelpunkt, jetzt aber den einen Brennpunkt der Ellipse bildet, dass also die Niveaukreise eine völlig andere Lage gegen die Bahnlinie haben (vergl. Fig. 94 mit Fig. 87). Da

Fig. 94.



$$v^2 = \frac{2q}{r} - h$$

(Gl. 3) ist, so wird die Geschwindigkeit am grössten für r_{min}, d. h. in der Centrumsnähe bei A, am kleinsten für r_{max}, d. h. in der Centrumsferne bei B.

Umlaufszeit.

Die Zeit, in welcher die elliptische Bahnlinie einmal durchlaufen wird, ergiebt sich einfach aus dem Satze der Flächen, Gl. 4, S. 86:

$$dF = {}^1\!/_2 A \cdot dt, \quad \text{daher}$$

$$F = {}^1\!/_2 A \cdot t \quad \text{oder}$$

$$t = \frac{2F}{A},$$

wenn F die ganze während eines Umlaufes von dem Fahrstrahle beschriebene Fläche der Ellipse ist. Da nun $F = a \cdot b \cdot \pi$; $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ und nach Gl. 11 $A = \sqrt{aq(1 - \varepsilon^2)}$, so wird

15) $$t = \frac{2a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,\pi}{\sqrt{aq(1 - \varepsilon^2)}} = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{q}}.$$

Der Mittelpunkt der Erde als Centrum.

Jeder Punkt ausserhalb der Erde erfährt von dieser eine Anziehungkraft, welche nach Gl. 1

$$K = \frac{m\,q}{r^2}$$

zu setzen ist. Nennen wir nun den Halbmesser der Erde R, so wird für $r = R$ die Kraft $K = mg$, dem Gewicht eines Massenpunktes an der Erdoberfläche. Daraus folgt $mg = \frac{m\,q}{R^2}$, d. h.

$$16)\qquad q = g\,R^2$$

für die Erde als Centralkörper.

Hat ein Massenpunkt m in der Nähe der Erdoberfläche, d. h. für $r = R$, eine Geschwindigkeit v, so führt er eine Bewegung in einer Kegelschnittlinie aus, deren einer Brennpunkt in dem Erdmittelpunkte liegt. Da für diesen Fall

$$\frac{q}{r} = \frac{g\,R^2}{R} = g\,R = 9{,}81 \cdot 6\,370\,000 = 62\,490\,000,$$

so wird die Bahnlinie nach Gl. 14

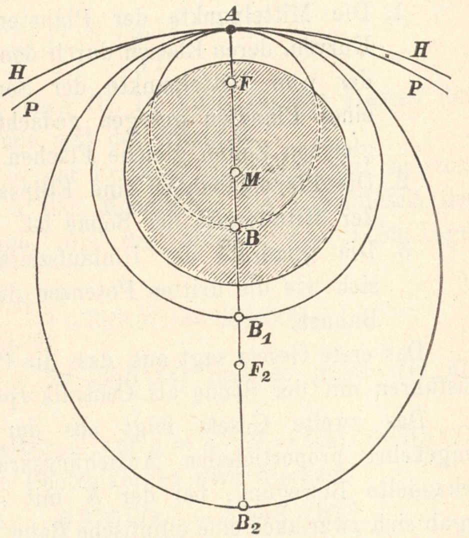
$$17)\left\{\begin{array}{lll} \text{ein Kreis} & \text{für } v = \sqrt{g\,R} = 7\,905 \text{ m/s.} & \text{(vergl. S. 57);} \\ \text{eine Ellipse} & \text{„ } v < \sqrt{2\,g\,R} = 11\,179 \text{ m/s.;} & \\ \text{„ Parabel} & \text{„ } v = \sqrt{2\,g\,R} = 11\,179 \text{ m/s.;} & \\ \text{„ Hyperbel} & \text{„ } v > \sqrt{2\,g\,R} = 11\,179 \text{ m/s..} & \end{array}\right.$$

Die gewöhnlichen Wurfbewegungen geschehen hiernach in Ellipsen, und zwar befindet sich der entferntere Brennpunkt im Mittelpunkte M der Erde (Fig. 95), während der andere Brennpunkt F in geringer Tiefe unter dem Anfangspunkt A der Bewegung liegt.

Hiernach ist die Wurfbewegung, die im 1. Theil, S. 48 als parabolisch bezeichnet wurde, richtiger eine elliptische zu nennen. Betrachtet man aber, wie es dort geschah, die Fallbeschleunigung als unveränderlich nach Grösse und Richtung, so wird dadurch der Erdhalbmesser als unendlich gross gegenüber der Länge der Bahnlinie eingeführt; dann ist auch die Halbachse a der Ellipse unendlich, und es wird die Ellipse nach S. 101 gleichbedeutend mit der Wurfparabel.

Wird die wagerecht gedachte Anfangsgeschwindigkeit grösser und grösser, so rückt der Brennpunkt F mehr und mehr nach M hin und fällt bei $v = 7905$ mit ihm zusammen; in diesem Fall ist die Bahnlinie der Kreis AB_1. Bei weiterer Zunahme von v rückt F über M hinaus, etwa nach F_2, und der Erdmittelpunkt M ist der dem Ausgangspunkt A nähere Brennpunkt der elliptischen Bahnlinie, welche sich nun bei B_2 weit von der Erde entfernen kann, aber immer noch wieder nach A zurückführt. Eine parabolische und hyperbolische Bahnlinie PAP und HAH für $v \geqq 11179$ sind in der Figur ebenfalls angedeutet.

Fig. 95.



Der Mittelpunkt der Sonne als Centrum.

Die Bewegung der Planeten und Kometen des Sonnensystems erfolgt unter Einwirkung einer von der Sonne ausgehenden Anziehungskraft $K = mq : r^2$. Weil nun allgemein (s. 1. Theil, S. 55)

$$K = k\frac{m m_1}{r^2} = \frac{mq}{r^2} \tag{18}$$

ist, so muss mit m_1 als Sonnenmasse,

$$q = k m_1,$$

d. h. nur von der Sonnenmasse abhängig sein. Mithin ist für alle die Sonne umlaufenden Planeten und Kometen q eine und dieselbe Grösse. Sind daher für zwei dieser Himmelskörper, deren Bahnlinien geschlossene Kurven bilden, a und a_1 die Halbachsen der Ellipsen, t und t_1 ihre Umlaufszeiten, so wird nach Gl. 15

$$\frac{t}{t_1} = \frac{a^{3/2}}{a_1^{3/2}}; \quad \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3}. \tag{19}$$

Die vorstehenden Ergebnisse enthalten die von Kepler (geb. 1571 in Weil (Württemberg), gest. 1630 in Regensburg) im Jahre 1618 aufgestellten Gesetze der Planetenbewegung, welche in etwas abgeänderter Form folgendermafsen lauten:

1. Die Mittelpunkte der Planeten bewegen sich in ebenen Kurven, deren Ebenen durch den Sonnen-Mittelpunkt gehen; der vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Mittpunkte eines Planeten gezogen gedachte Fahrstrahl beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, deren einer Brennpunkt der Mittelpunkt der Sonne ist.
3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Halbachsen ihrer Bahnen.

Das erste Gesetz sagt aus, dass die Planeten Centralbewegungen ausführen mit der Sonne als Centralkörper (s. S. 85).

Das zweite Gesetz folgt aus der Annahme einer mit r^2 umgekehrt proportionalen Anziehungskraft. Für die auf S. 92 behandelte Bewegung, bei der K mit r direkt proportional war, ergab sich zwar auch eine elliptische Bahn, doch lag dort das Centrum im Mittelpunkte der Ellipse, während es jetzt in dem einen Brennpunkte sich befindet.

Das dritte Gesetz ist der Inhalt der Gl. 19, welche entstand, indem man q für alle Planeten als von gleicher Grösse annahm.

Kepler folgerte diese Gesetze aus seinen und Tycho de Brahe's (geb. 1546 in Knudstrup (Dänemark), gest. 1601 in Prag) Beobachtungen und gab damit eine Beschreibung der vorhandenen Bewegungen, die er aus den sehr verwickelten scheinbaren Bewegungen in Bezug auf die Erde abgeleitet hatte. Die mechanische Entwickelung erfolgte erst 67 Jahre später durch Newton, der eben aus den nach den Kepler'schen Gesetzen erfolgenden Bewegungen die Ursache derselben, nämlich die Massenanziehung nach Gl. 18 folgerte.

Verhältnis der Masse der Sonne zu der eines Planeten.

Gl. 15 giebt die Möglichkeit, die Masse der Sonne mit derjenigen eines Planeten zu vergleichen, falls letzterer von einem Mond umkreist wird. Beziehen sich nämlich q, a und t auf den

Umlauf eines Mondes um seinen Planeten, q_1, a_1 und t_1 auf den Umlauf des Planeten um die Sonne, so ist nach Gl. 15

$$t^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{q}; \quad t_1{}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a_1{}^3}{q_1}; \quad \text{daher}$$

20) $$\frac{q_1}{q} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_1}{a}\right)^3;$$

das gleiche Verhältnis gilt nach Gl. 18 auch für die Massen der Centralkörper, d. h. der Sonne und des Planeten.

Die grosse Halbachse a_1 der Erdbahn ist 398,87 mal so gross wie die grosse Halbachse a der Mondbahn; die Umlaufszeit der Erde ist $t_1 = 365{,}26$ Tage, die des Mondes $t = 27{,}32$ Tage. Hiermit wird

$$\frac{q_1}{q} = \left(\frac{27{,}32}{365{,}26}\right)^2 \cdot 398{,}87^3 = 355\,000,$$

d. h. die Masse der Sonne ist 355 000 mal so gross wie die der Erde.

Für die Erde als Centralkörper war $q = g \cdot R^2 = 9{,}81 \cdot 6\,370\,000^2$ (Gl. 16); für die Sonne als Centralkörper wird hiernach

$$q_1 = 355\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 6\,370\,000^2 = 1\,413 \cdot 10^{17}.$$

Sollte die Erde in einem Abstand $r = 148\,472 \cdot 10^6$ Meter von der Sonne (dies ist etwa die grosse Halbachse der Erdbahn) sich kreisförmig bewegen, so müsste sie nach Gl. 14 eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{q_1}{r}} = \left(\frac{1413 \cdot 10^{17}}{148\,472 \cdot 10^6}\right)^{1/2} = 30\,850 \text{ m/s.}$$

haben. Diese Bedingung ist wirklich nahezu erfüllt, und daher ist die Bahn der Erde nur sehr wenig excentrisch; die beiden Achsen der Ellipse verhalten sich wie 7001 : 7000. Wäre die Geschwindigkeit $\sqrt{2}$ mal grösser, so würde die Bahnlinie nicht mehr geschlossen sein können.

Potential.

Die Kräftefunktion U solcher Kräfte, die nach dem Newton'schen Gesetze veränderlich sind, wird, unter Fortlassung der Konstanten C und mit negativem Vorzeichen genommen, im Besonderen das Potential V dieser Kräfte genannt. Nach S. 98 ist

$$U = \frac{k \cdot m_1 m}{r} + C, \quad \text{daher} \quad V = -\frac{k \cdot m_1 m}{r}.$$

Für $r = \infty$ wird $V = 0$.

Bewegt sich ein Massenpunkt m aus einem Abstand r vom Centrum m_1 in unendlich grosse Entfernung, so ist die dabei verrichtete Arbeit

$$U_\infty - U = 0 - \frac{k m_1 m}{r} = V.$$

Das Potential V der von einem Centrum m_1 ausgehenden Anziehungskraft ist daher diejenige Arbeit, welche von der Kraft geleistet wird, wenn der Massenpunkt m aus dem Abstand r sich in unendliche Entfernung begiebt. Nach welcher Richtung und auf welchem Wege diese Bewegung erfolgt, ist nach S. 89 gleichgültig.

Ist für die Anfangslage des beweglichen Punktes die Geschwindigkeit c, der Abstand r_0, das Potential V_0, für die Endlage die Geschwindigkeit v, der Abstand r, das Potential V, so ist

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = U - U_0 = V_0 - V, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{mv^2}{2} + V = \frac{mc^2}{2} + V_0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{mv^2}{2} + V$$

eine unveränderliche Grösse.

Die Niveauflächen sind Flächen gleichen Potentials (s. S. 90).

5. Wurfbewegung mit Luftwiderstand.

Legt man durch die Anfangsgeschwindigkeit c der Bewegung eine lothrechte Ebene, nimmt in dieser die AX wagerecht, die AY lothrecht nach oben, so muss die Bewegung in der Ebene XAY (Fig. 96) erfolgen, weil dieselbe die Anfangsgeschwindigkeit, sowie auch die Kräfte mg und den Widerstand $W = mg \cdot v^2 : k^2$ enthält (s. S. 74).

Es ergiebt sich dann, wenn ϑ der Neigungswinkel der Bahn an beliebiger Stelle ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{W}{m}\cos\vartheta = -\frac{g}{k^2}v^2 \cdot \cos\vartheta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{W}{m}\sin\vartheta = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\cdot\sin\vartheta\right).$$