3. Bewegung eines Massenpunktes unter Wirkung einer von einem Centrum ausgehenden, mit der Entfernung von diesem verhältnisgleichen Anziehungskraft.

Da diese Bewegung eine Centralbewegung ist, so muss sie nach S. 84 in einer ebenen Bahnlinie erfolgen, die daher auf nur zwei Achsen OX und OY bezogen werden braucht. Der Punkt befinde sich (Fig. 85) zu Anfang an der auf der OY befindlichen Stelle A im Abstand $OA = y_0$ vom Centrum O und habe eine beliebig gerichtete Anfangsgeschwindigkeit c, welche in c_x und c_y zerlegt werden kann. Da c nicht mit der Kraftrichtung AO zusammenfällt, so muss nach S. 83 eine krummlinige Bewegung entstehen. Dieser Fall ist eine Verallgemeinerung der S. 53 behandelten geradlinigen Schwingung, in so fern die Anziehungskraft K demselben Gesetz unterworfen ist. Wir drücken deshalb K auch wieder in derselben Weise

1) $$\boldsymbol{K = m \cdot k^2 \cdot r}$$

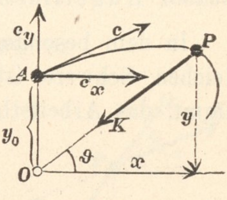
aus, so dass k^2 die Beschleunigung im Abstand Eins von dem Centrum bedeutet.

Da die Seitenkräfte von K in der Richtung der beiden Achsen im Sinne dieser Achsen negativ sind, so wird in der x-Richtung die Beschleunigung

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 r \cdot \cos\vartheta = -k^2 x,$$

weil $r \cos\vartheta = x$ ist. Entsprechendes gilt für die y-Richtung. Die beiden Beschleunigungsgleichungen

Fig. 85.



2) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$$

lassen sich in diesem Falle ganz unabhängig von einander integriren. Wir bedürfen hier der allgemeinen Lösung der Differentialgleichungen 2 und müssen deshalb etwas anders verfahren als auf S. 54. $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ multipliciren wir auf beiden Seiten mit $2\,dx$ und schreiben

$$2\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt} = -2k^2 \cdot x \cdot dx.$$

Dies giebt, integrirt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -k^2x^2 + e^2,$$

wo e^2 die noch unbestimmt gelassene Integrations-Konstante bedeutet. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{e^2 - k^2x^2}} = \frac{1}{k}\frac{d\left(\frac{kx}{e}\right)}{\sqrt{1 - \frac{k^2x^2}{e^2}}}$$

mit

$$t = \frac{1}{k}\arcsin\frac{kx}{e} + \frac{\alpha}{k},$$

worin $\frac{\alpha}{k}$ wieder eine Integrations-Konstante bedeutet. Letztere Gleichung lässt sich umschreiben in

$$\frac{k}{e}x = \sin(kt - \alpha) \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{e}{k}\sin(kt - \alpha) = \frac{e}{k}\sin kt \cdot \cos\alpha - \frac{e}{k}\cos kt \cdot \sin\alpha$$

oder, wenn man die noch unbestimmten Konstanten

$$\frac{e}{k}\cos\alpha \quad \text{und} \quad \frac{e}{k}\sin\alpha$$

mit A bezw. $-B$ vertauscht:

3) $$x = A\sin kt + B\cos kt$$

und ebenso für die andere Achsenrichtung

4) $$y = C\sin kt + D\cos kt.$$

Die noch unbestimmten Werthe A, B, C und D müssen aus dem Anfangszustand ermittelt werden. Für $t = 0$ ist

$$x = 0; \qquad y = y_0;$$
$$v_x = c_x; \qquad v_y = c_y.$$

Aus Gl. 3 und 4 ergiebt sich aber durch Differentiation:

5) $$v_x = \frac{dx}{dt} = Ak \cdot \cos kt - Bk \cdot \sin kt,$$

6) $$v_y = \frac{dy}{dt} = Ck \cdot \cos kt - Dk \cdot \sin kt.$$

Setzt man in die Gl. 3—6 die Anfangswerthe mit $t = 0$ ein, so erhält man

$$0 = A \cdot \sin 0 + B \cdot \cos 0, \quad \text{d. h.} \quad 0 = B \cdot 1 \quad \text{oder} \quad B = 0;$$

$$y_0 = C \cdot 0 + D \cdot 1, \quad \text{d. h.} \quad D = y_0;$$

$$c_x = A \cdot k \cdot 1 - 0 \cdot k \cdot 0, \quad \text{d. h.} \quad A = \frac{c_x}{k};$$

$$c_y = C \cdot k \cdot 1 - D \cdot k \cdot 0, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{c_y}{k}.$$

Hiermit geben Gl. 3 und 4 die bestimmten Bewegungsgleichungen

$$7) \qquad x = \frac{c_x}{k} \cdot \sin kt,$$

$$8) \qquad y = \frac{c_y}{k} \cdot \sin kt + y_0 \cdot \cos kt.$$

Um die Gleichung der Bahnlinie zu erhalten, also t zu entfernen, muss man Gl. 7 und 8 nach $\sin kt$ und $\cos kt$ auflösen, beide quadriren und die Summe der Quadrate mit 1 vertauschen. Es wird aus Gl. 7:

$$\sin kt = \frac{k}{c_x} \cdot x$$

und, mit Einführung dieses Werthes in Gl. 8, aus dieser

$$\cos kt = \frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{k \cdot y_0} \cdot \sin kt = \frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{c_x \cdot y_0} \cdot x; \quad \text{mithin}$$

$$1 = \frac{k^2 x^2}{c_x^2} + \left(\frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{c_x \cdot y_0} \cdot x\right)^2.$$

Dies giebt, geordnet:

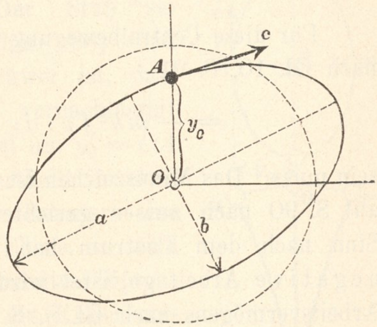
$$9) \qquad x^2 (k^2 y_0^2 + c_y^2) + y^2 c_x^2 - 2\, xy\, c_x c_y = c_x^2 y_0^2.$$

Diese Gleichung zweiten Grades bedeutet eine Kegelschnittlinie, u. zw., da

$$(k^2 y_0^2 + c_y^2)\, c_x^2 - (c_x \cdot c_y)^2 = k^2 y_0^2 c_x^2 + c_x^2 \cdot c_y^2 - c_x^2 \cdot c_y^2$$
$$= k^2 y_0^2 c_x^2 > 0,$$

eine Ellipse; da in Gl. 9 Glieder mit x und y allein in der ersten Potenz nicht vorkommen, so fällt der Mittelpunkt der elliptischen Bahnlinie mit dem Centrum O zusammen; nur liegen, wegen des mit $x \cdot y$ behafteten Gliedes, die Hauptachsen $2a$ und $2b$ der Ellipse schief gegen das Achsenkreuz, was durch die schiefe Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c verursacht wird (Fig. 86).

Fig. 86.



In der gekrümmten Bahnlinie kann die Geschwindigkeit an keiner Stelle Null werden, weil an einer solchen Stelle die Bewegung in eine geradlinige, nach O gerichtete übergehen müsste, was aber der elliptischen Bahnlinie widersprechen würde. Die Ellipse muss also in dem gleichen Umfahrungssinne fortwährend durchlaufen werden. Die Zeit eines Umlaufes ist

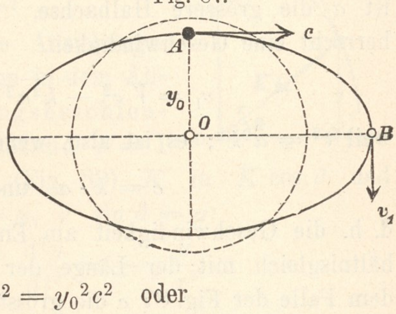
$$t_1 = \frac{2\pi}{k}, \tag{10}$$

weil x, y, v_x und v_y nach der Gl. 3—6 stets wieder dieselben Werthe annehmen, wenn sich der Winkel kt um 2π, also t um $2\pi : k$ geändert hat.

Die Umlaufszeit nach Gl. 10 entspricht der Dauer einer Doppelschwingung nach S. 55. Für $y_0 = 0$, d. h. für den Fall, dass der Punkt m in der Gleichgewichtslage, dem Centrum, die Geschwindigkeit c bekommt, geht die Gl. 9 in die Gleichung einer geraden, mit der Richtung von c zusammenfallenden Linie

$$y = \frac{c_y}{c_x} \cdot x \quad \text{über.}$$

Fig. 87.



Für den einfacheren Fall, dass die Anfangsgeschwindigkeit c im Punkt A parallel der OX ist (Fig. 87), also $c_x = c$, $c_y = 0$, geht Gl. 9 über in

$$x^2 k^2 y_0^2 + y^2 c^2 = y_0^2 c^2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1. \tag{11}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihre Hauptachsen mit den Halbachsen

$$a = \frac{c}{k} = OB \quad \text{und} \quad b = y_0 = OA.$$

Für diese Centralbewegung giebt es eine Kräftefunktion, welche nach Gl. 10, S. 91

$$U = -mk^2 \int r \cdot dr + C = -\frac{mk^2 r^2}{2} + C$$

sein muss. Das Minuszeichen ist dadurch begründet, dass die Kraft K auf S. 90 nach aussen gerichtet angenommen war, hier aber den Sinn nach dem Centrum hat, so dass bei zunehmendem r eine negative Arbeit geleistet wird. Hiernach ist die Gleichung des Arbeitsvermögens nach Gl. 8, S. 88

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = -\frac{mk^2}{2}(r^2 - y_0^2)$$

und daher die Geschwindigkeit an beliebiger Stelle

12) $$v = \sqrt{c^2 - k^2(r^2 - y_0^2)}.$$

Von den Niveaukugeln (S. 91) kommen nur die Grösstkreise als Niveaukreise in Betracht. An den vier Schnittpunkten der Bahnlinie mit einem solchen (in Fig. 86 und 87 punktirten) Kreise hat der Punkt m die gleiche Geschwindigkeit. Je mehr er sich vom Centrum entfernt, desto kleiner wird seine Geschwindigkeit.

Ist in dem Falle der Fig. 87 $a = \frac{c}{k} > y_0$, also $c > k \cdot y_0$, so ist a die grössere Halbachse. Am Endpunkte derselben, bei B, herrscht eine Geschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{c^2 - k^2 a^2 + k^2 y_0^2} = k \cdot y_0,$$

weil $c^2 = a^2 k^2$; es ist also, wenn man y_0 mit b vertauscht,

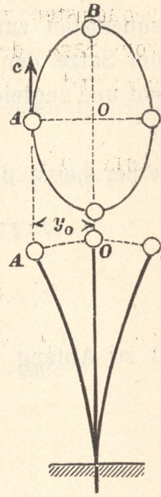
$$c = k \cdot a \quad \text{und} \quad v_1 = k \cdot b,$$

d. h. die Geschwindigkeit am Ende der einen Halbachse ist verhältnisgleich mit der Länge der anderen Halbachse. Es ist in dem Falle der Fig. 87 c die grösste, v_1 die kleinste Geschwindigkeit.

Soll die Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser y_0 und daher auch mit gleichbleibender Geschwindigkeit erfolgen, so muss, weil $c = k \cdot a$ ist und $a = y_0$ werden soll, $c = k \cdot y_0$ gemacht werden.

Diese Bewegung kommt, wenigstens annäherungsweise, vor, wenn die Kraft K durch den nach allen Richtungen gleichen Biegungswiderstand eines geraden elastischen Stabes von kreisförmigem Querschnitte geliefert wird. Der Stab sei unten lothrecht eingespannt (Figur 88) und trage oben eine Kugel, die so schwer ist, dass dagegen die Masse des Stabes vernachlässigt werden kann. Bringt man die Kugel um $y_0 = OA$ aus der Gleichgewichtslage O und ertheilt ihr etwa mit der Hand oder mittels eines Hammers eine Geschwindigkeit c in wagerechter Ebene, so wird der Mittelpunkt der Kugel die behandelte Ellipsenbewegung ausführen. Lässt man die Kugel einfach los ($c = 0$), so schwingt sie in einem schwachen Bogen AOC, und ihre wagerechte Seitenbewegung folgt annähernd den Gesetzen der geradlinigen Schwingung (S. 53).

Fig. 88.



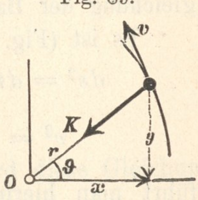
4. Bewegung der Himmelskörper unter Einwirkung der Massenanziehung nach dem Newton'schen Gesetze.

Für eine von einem Centralpunkt m_1 angezogene Masse m im Abstand r vom Centrum kann man (nach 1. Theil, S. 55) die Anziehungskraft

$$1)\qquad K = \frac{k \cdot m_1 m}{r^2} = \frac{m q}{r^2}$$

schreiben. Darin bedeutet k die Anziehungskraft zwischen zwei Masseneinheiten in dem Abstand $r = 1$, q die Anziehungsbeschleunigung der Masse m im Abstand $r = 1$ vom Centrum. Zerlegt man (Fig. 89) K in $K \cos \vartheta$ und $K \sin \vartheta$, so wird weil $r \cdot \cos \vartheta = x$, $r \cdot \sin \vartheta = y$:

Fig. 89.



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -q\frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -q\frac{y}{r^3}$$

oder mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -q\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -q\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$