Im Anschluss an die Bezeichnung $ds : dt$ = Geschwindigkeit und $\omega = d\alpha : dt$ = Winkelgeschwindigkeit, nennt man $dF : dt$, d. h. die in der Zeiteinheit beschriebene Fahrstrahl-Fläche, die Flächen-Geschwindigkeit. Eine Bewegung, bei der die Kraft stets durch ein festes Centrum geht, erfolgt also mit gleichbleibender Flächengeschwindigkeit. Der analytische Ausdruck dafür ist

$$4)\qquad \frac{dF}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{dt} = \frac{A}{2},$$

wenn A eine Konstante bedeutet.

Dieser Satz rührt schon von Newton her. Ein Sonderfall ist das erste Kepler'sche Gesetz (S. 106).

2. Der Satz des Arbeitsvermögens. Kräftefunktion; Niveauflächen.

Der Satz des Arbeitsvermögens wurde freilich im 1. Theil, S. 48 schon allgemein bewiesen; er soll hier aber noch ein Mal in anderer Weise entwickelt und zu weiteren Schlüssen benutzt werden.

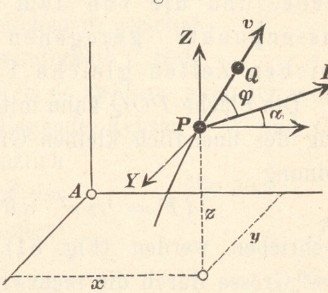
Zerlegt man die auf den Massenpunkt m wirkende Kraft K (Fig. 82) nach drei Achsenrichtungen in X, Y, Z und sind x, y, z die augenblicklichen Koordinaten von m, so ist

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y;$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Fig. 82.



Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit dx, dy und dz und zählt sie zusammen, so entsteht

$$m\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt}\right\} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Nun ist $$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt} = \frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

und weil $$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

so kann man obige Gleichung auch schreiben:

1) $$m\,d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Die linke Seite ist die während der Zeit dt erfolgende Zunahme des Arbeitsvermögens (1. Theil, S. 44) des Punktes m, die rechte Seite aber die Summe der Arbeiten der drei Seitenkräfte X, Y und Z. Denn ist $PQ = ds$ das in der Zeit dt beschriebene Bahntheilchen, sind dx, dy, dz dessen Projektionen auf die Achsen, so ist nach 1. Theil, S. 42 $X \cdot dx$ die von X geleistete Arbeit. Im 1. Theil, S. 43 wurde schon bewiesen, dass die Arbeitssumme von X, Y und Z gleich der Arbeit der Mittelkraft K sei. Es ergiebt sich dies auch leicht in folgender Weise: Sind α, β und γ die Richtungswinkel von K gegen die Achsen, also

2) $$K \cos\alpha = X;\quad K\cos\beta = Y;\quad K\cos\gamma = Z;$$

sind ferner α_1, β_1 und γ_1 die Richtungswinkel von ds oder v, d. h.

3) $$ds \cdot \cos\alpha_1 = dx;\quad ds \cdot \cos\beta_1 = dy;\quad ds \cdot \cos\gamma_1 = dz;$$

und nennt man φ den Winkel, welchen K mit ds (oder v) einschliesst, so gilt (vergl. 2. Theil, S. 226)

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1,$$

oder wenn man alle Glieder dieser Gleichung mit $K \cdot ds$ multiplicirt und die Gl. 2 und 3 benutzt:

4) $$K \cdot ds \cdot \cos\varphi = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz,$$

mithin nach Gl. 1:

$$d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = K \cdot ds \cdot \cos\varphi;$$

die rechte Seite ist die Arbeit der Kraft K, weil $ds \cdot \cos\varphi$ die in der Richtung von K zurückgelegte Wegeslänge bedeutet.

Hat der Punkt m an dem Orte x_0, y_0, z_0 die Geschwindigkeit v_0, an dem Orte x_1, y_1, z_1 die Geschwindigkeit v_1, so ergiebt sich für diese endliche Bewegung der Satz des Arbeitsvermögens

5) $$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int X dx + Y dy + Z dz = \int K \cdot ds \cdot \cos\varphi.$$

Die Grenzen für die Integrationen auf der rechten Seite sind durch Anfangs- und Endlage des Punktes m bedingt. Gl. 5 ist offenbar der Satz des Arbeitsvermögens (der kinetischen Energie oder der lebendigen Kraft), d. h. es ist die Zunahme des Arbeitsvermögens gleich der verrichteten Arbeit.

Es werde nun die Voraussetzung gemacht, dass 1. die Kraft K und somit auch ihre Seitenkräfte reine Funktionen des Ortes seien, also jedes Mal wieder denselben Werth annehmen, so oft der Punkt m sich wieder an demselben Orte befinde und dass 2. die Seitenkräfte X, Y und Z die theilweisen (partiellen) Abgeleiteten einer Funktion U nach bezw. x, y und z darstellen, d. h.

$$6) \qquad X = \frac{\delta U}{\delta x}; \quad Y = \frac{\delta U}{\delta y}; \quad Z = \frac{\delta U}{\delta z}.$$

Dann ist U auch eine reine Funktion des Ortes, und es lässt sich das Arbeitstheilchen

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{\delta U}{\delta x} dx + \frac{\delta U}{\delta y} dy + \frac{\delta U}{\delta z} dz$$

schreiben, d. h. als das vollständige (totale) Differential einer Funktion U darstellen und $= dU$ setzen. Unter dieser Voraussetzung wird aus Gl. 1:

$$7) \qquad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU, \quad \text{daher}$$

$$8) \qquad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int dU = U_1 - U_0,$$

wenn U_0 und U_1 diejenigen Werthe der Funktion U sind, welche dem Anfangs- bezw. dem Endorte des Punktes m entsprechen. Die Funktion U, welche den Gl. 6 genügt, heisst **Kräftefunktion.** Entspricht der wirkenden Kraft eine Kräftefunktion, so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens eines Punktes m gleich dem Unterschiede der beiden, der Anfangs- und Endlage entsprechenden Werthe dieser Funktion.

U_0 ist derjenige besondere Werth, den die Kräftefunktion $U = f(x, y, z)$ annimmt, wenn man in dieselbe die Koordinaten x_0, y_0, z_0 der Anfangsstelle des Punktes m einsetzt, d. h. es ist $U_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Ausser diesem Anfangspunkte der Bewegung giebt es aber noch unendlich viele andere Punkte im Raume, deren Koordinaten der Kräftefunktion den gleichen Werth U_0 geben.

Der Inbegriff oder Ort aller dieser Punkte ist eine Fläche, die wir auch U_0 nennen wollen und deren Gleichung

9) $$f(x, y, z) = U_0 \quad \text{ist.}$$

Hätte z. B. die Kräftefunktion die einfache Form $U = x^2 + y^2 + z^2$ und wäre für den Anfang $x_0 = 1$; $y_0 = 2$; $z_0 = 3$, so würde $U_0 = 14$. Setzt man aber

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14,$$

so ist dies die Gleichung einer Kugelfläche vom Halbmesser $\sqrt{14}$; die Koordinaten eines jeden Punktes dieser Kugelfäche genügen der Gleichung derselben, geben also der Funktion U den gleichen Wert 14. Hat der Punkt m zu Ende der Beobachtung die Koordinaten $x_1 = 10$; $y_1 = 12$; $z_1 = 13$, so wird $U_1 = 413$, und

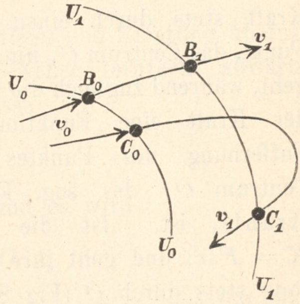
$$x^2 + y^2 + z^2 = 413$$

ist die Gleichung einer Kugelfläche U_1 vom Halbmesser $r_1 = \sqrt{414}$, deren Koordinaten der Funktion U den Werth $U_1 = 413$ geben. Die Gleichungen der Flächen U_0 und U_1 unterscheiden sich nur durch die Konstante U_0 bezw. U_1; die Flächen gehören derselben Gattung an, sind nämlich Kugelflächen mit gemeinsamem Mittelpunkte.

Ebenso sind U_0 und U_1 bei beliebiger Form der Kräftefunktion Flächen derselben Art und unterscheiden sich nur durch die Konstante U_0 bezw. U_1.

In Fig. 83 mögen die krummen Linien $U_0 U_0$ und $U_1 U_1$ die Durchschnittslinien zweier solchen Flächen U_0 und U_1 mit irgend einer anderen Fläche bedeuten. Bewegt sich ein Massenpunkt m unter Einwirkung einer Kraft K, der die Kräftefunktion U entspricht, auf verschiedenen Bahnlinien $B_0 B_1$ und $C_0 C_1$, so ändert sich das Arbeitsvermögen stets um den gleichen Werth $U_1 - U_0$, wenn der Punkt von irgend einer Stelle der Fläche U_0 zu irgend einer Stelle der Fläche U_1 gelangt. Hatte er beim Durchschneiden der Fläche U_0 die Geschwindigkeit v_0, so gilt für die Geschwindigkeit v_1, mit der er die Fläche U_1 erreicht, die Gl.:

Fig. 83.



$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = U_1 - U_0.$$

Kehrt er aber bei seiner Bewegung zur Fläche U_0 zurück, so hat er auch wieder die Geschwindigkeit v_0.

Verlässt der Massenpunkt bei seiner Bewegung die Fläche U_0 gar nicht, beschreibt er vielmehr irgend eine in dieser Fläche liegende Bahn, so bleibt seine Geschwindigkeit stets v_0, es wird also die Arbeit der Kraft K für jedes Bewegungstheilchen Null, d. h.

$$K \cdot ds \cdot \cos\varphi = 0, \quad \text{also}$$

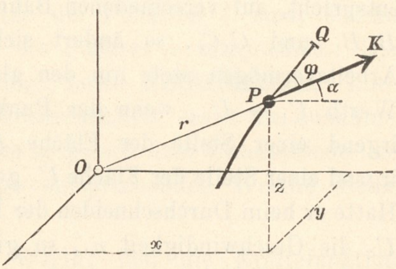
$$\cos\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = {}^1\!/_2\,\pi.$$

Dies bedeutet, dass die Kraft K zu jeder in der Fläche U_0 befindlichen Bahnlinie, also auch zu der Fläche U_0 selbst rechtwinklig steht. Gleiches gilt von der Fläche U_1. Diese Flächen U_0 und U_1 heissen **Niveauflächen.**

Lässt sich das Arbeitstheilchen der Kraft K als das vollständige Differential einer Funktion U darstellen, so giebt es für K eine Kräftefunktion, nämlich U, und auch durch jeden Punkt des Raumes, für welchen K noch einen endlichen Werth hat, eine Niveaufläche. Diejenigen Linien, welche alle Niveauflächen rechtwinklig schneiden, heissen Kraftlinien. Die möglichen Richtungen von K bilden Tangenten an die Kraftlinien.

Bei Centralbewegungen giebt es eine Kräfte-Funktion. Unter Centralbewegungen versteht man solche, bei denen die wirkende Kraft stets durch einen festen Punkt, das Centrum O, hindurchgeht, während zugleich die Grösse der Kraft eine Funktion der Entfernung des Punktes vom Centrum O, des sog. Fahrstrahls, ist. Ist die Kraft $K = F(r)$ und geht ihre Richtung stets durch O (Fig 84), so ist bei einer unendlich kleinen Bewegung PQ die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge, d. h. die Projektion von PQ auf die Richtung von r, einfach dr, daher das Arbeitstheilchen

Fig. 84.



$$K \cdot ds \cdot \cos\varphi = K \cdot dr = F(r) \cdot dr.$$

Da dies eine Differentialfunktion von nur einer Veränderlichen ist, so ist es ein vollständiges Differential, man kann es daher schreiben

$$dU = K \cdot dr, \quad \text{also ist}$$

10) $$U = \int K \cdot dr + C$$

die Kräftefunktion einer Centralbewegung.

Man überzeugt sich auch leicht, dass $X = \frac{\partial U}{\partial x}$. Denn, da U als eine $f(r)$ gefunden, so wird

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\,\frac{dr}{dx} = K \cdot \frac{dr}{dx};$$

aus $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ wird aber

$$\frac{dr}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = K \cdot \frac{x}{r} = K \cos \alpha = X.$$

Die Kraftlinien sind vom Centrum nach allen Richtungen ausgehende geradlinige Strahlen. Da diese Kraftlinien von den Niveauflächen rechtwinklig geschnitten werden müssen, so sind letztere offenbar Kugelflächen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt O.

In dem besonderen Falle der nach Grösse und Richtung überall gleichen Schwere ist, wenn man die z-Achse lothrecht abwärts nimmt, das Arbeitstheilchen von der Grösse

$$mg \cdot dz,$$

d. h. ein vollständiges Differential dU, und es wird

$$U = mg \cdot z + C$$

die Kräftefunktion. Da die Kraftlinien sämmtlich parallel der z-Achse sind, so müssen die Niveauflächen wagerechte Ebenen sein.

Sobald jedoch Reibungs- und Mittelwiderstände auftreten, die stets entgegengesetzt der Bewegungsrichtung wirken, sich also mit der Umkehrung der Bewegung ebenfalls umkehren, giebt es keine Kräftefunktion, also auch keine Niveauflächen.