Zur Erleichterung der Ausführung der Rechnungen in bestimmten Fällen dienen einige allgemeine Sätze, bei deren Ableitung diejenigen Schritte ein für alle Mal gemacht werden, die man ohne diese Sätze in jedem besonderen Falle thun müsste.

I. Der Satz der Flächen.

Dieser Satz gilt nur für solche Bewegungen, bei denen die wirkende Kraft stets durch einen festen Punkt, das Centrum O, hindurchgeht.

Zunächst ist leicht zu erkennen, dass eine solche Bewegung in einer ebenen Bahnlinie erfolgen muss, dass sie nicht aus der durch die Anfangsgeschwindigkeit c und das Centrum O bestimmten Ebene E heraustreten kann. Da nämlich (Fig. 79) die Geschwindigkeit c und auch die Kraft K, mithin auch die Elementarbeschleunigung $p \cdot dt$ in der Ebene E liegen, so wird die Geschwindigkeit nach einem Zeittheilchen, welche die geometrische Summe von c und $p \cdot dt$ ist, auch in der Ebene E liegen, und da dieser Vorgang sich für jedes weitere Zeittheilchen in gleicher Weise abspielt, so bleibt die Geschwindigkeit v stets in der Ebene E. Man kann nun durch O zwei zu einander rechtwinklige, ebenfalls in der Ebene E liegende Achsen OX und OY ziehen, dann bleibt die Bewegung gänzlich in der Ebene XOY, und man bedarf der dritten Achse OZ gar nicht bei der Untersuchung solcher Bewegungen.

Fig. 79.

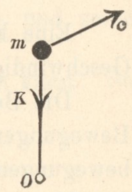
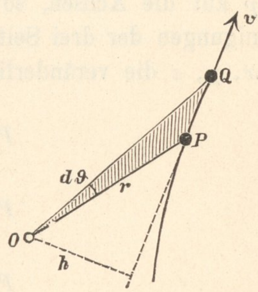


Fig. 80.



Ist nun PQ (Fig. 80) ein unendlich kleines Bewegungstheilchen $ds = v \cdot dt$ und bezeichnet man den rechtwinkligen Abstand des Centrums O von der Richtung der Geschwindigkeit v mit h, so ist leicht einzusehen, dass $v \cdot h$ konstant sein muss. Denn haben v und h zu Anfang die Werthe v_0 und h_0, so ist v die Resultirende oder die geometrische Summe aus v_0 und den Elementarbeschleunigungen $p \cdot dt$, welche während der Bewegung vom Anfange bis zu der Stelle P durch die Kraft K

geliefert wurden. Da nun nach 1. Theil, S. 101 der Satz der Drehmomente auch für Geschwindigkeiten gilt und die Elementarbeschleunigungen sämmtlich durch O gehen, also in Bezug auf O das Moment Null haben, so muss

$$-vh = -v_0 h_0 \quad \text{oder} \quad vh = v_0 h_0 \quad \text{sein.}$$

Zieht man nun die Fahrstrahlen OP und OQ, bezeichnet $\measuredangle POQ$ mit $d\vartheta$, die Fläche POQ mit dF, so ist

$$dF = {}^1\!/_2\, PQ \cdot h = {}^1\!/_2\, v \cdot dt \cdot h = {}^1\!/_2\, v_0 h_0 \cdot dt, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{dF}{dt} = {}^1\!/_2\, v_0 h_0, \quad \text{d. h. konstant.}$$

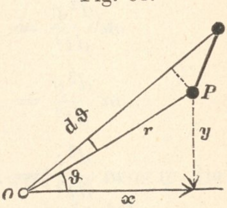
Setzt man $v_0 h_0 = v \cdot h = A$, so wird

$$1) \qquad \boldsymbol{\frac{dF}{dt} = \frac{A}{2}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{dF = \frac{A}{2} dt},$$

d. h. in jedem Zeittheilchen dt wird von dem Fahrstrahl OP eine mit dt verhältnisgleiche Fläche dF beschrieben, folglich auch in gleichen endlichen Zeiten gleiche Flächen. Daher hat man den Satz:

Bei Bewegungen, bei denen die Kraft stets durch ein festes Centrum geht, liegt die Bahnlinie in der durch das Centrum und die Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene, und die von dem Centrum nach dem beweglichen Massenpunkte gezogenen Fahrstrahlen beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Fig. 81.



Die Fläche POQ kann mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung

$$2) \qquad dF = {}^1\!/_2\, r^2 \cdot d\vartheta$$

geschrieben werden (Fig. 81). Will man diese Grösse durch die rechtwinkligen Koordinaten x und y des Punktes P ausdrücken, so bedenke man, dass

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}, \quad \text{also} \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

mithin

$$d\vartheta = d\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2}$$

$$3) \qquad \text{und} \quad r^2 d\vartheta = x \cdot dy - y \cdot dx \quad \text{wird.}$$

Im Anschluss an die Bezeichnung $ds : dt$ = Geschwindigkeit und $\omega = d\alpha : dt$ = Winkelgeschwindigkeit, nennt man $dF : dt$, d. h. die in der Zeiteinheit beschriebene Fahrstrahl-Fläche, die Flächen-Geschwindigkeit. Eine Bewegung, bei der die Kraft stets durch ein festes Centrum geht, erfolgt also mit gleichbleibender Flächengeschwindigkeit. Der analytische Ausdruck dafür ist

$$4)\qquad \frac{dF}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{dt} = \frac{A}{2},$$

wenn A eine Konstante bedeutet.

Dieser Satz rührt schon von Newton her. Ein Sonderfall ist das erste Kepler'sche Gesetz (S. 106).

2. Der Satz des Arbeitsvermögens. Kräftefunktion; Niveauflächen.

Der Satz des Arbeitsvermögens wurde freilich im 1. Theil, S. 48 schon allgemein bewiesen; er soll hier aber noch ein Mal in anderer Weise entwickelt und zu weiteren Schlüssen benutzt werden.

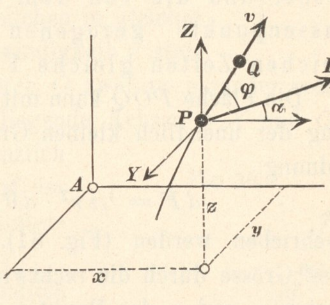
Zerlegt man die auf den Massenpunkt m wirkende Kraft K (Fig. 82) nach drei Achsenrichtungen in X, Y, Z und sind x, y, z die augenblicklichen Koordinaten von m, so ist

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y;$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Fig. 82.



Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit dx, dy und dz und zählt sie zusammen, so entsteht

$$m\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt}\right\} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Nun ist $$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt} = \frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

und weil $$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$