Gl. 12) $t = \frac{v}{g}$,

Gl. 13) $t_2 = \frac{v_1}{g}$,

Gl. 14) $t_2 = \frac{c}{g}$,

Gl. 15) $x = \frac{g t^2}{2}$.

B. Freie krummlinige Bewegung eines Massenpunktes.

Eine krummlinige Bewegung entsteht, wenn Kraftrichtung und Geschwindigkeitsrichtung nicht übereinstimmen.

Die Bewegung eines Punktes im Raum ist bestimmt durch die Bewegungen seiner Projektionen auf drei Achsen. Diese Projektionsbewegungen nennt man auch Seitenbewegungen. Ist R die auf den Massenpunkt wirkende Mittelkraft, p die Beschleunigung, also $R = mp$, sind X, Y und Z die Projektionen von R auf die drei Achsen oder die Seitenkräfte in der Richtung der Achsen, p_x, p_y, p_z die entsprechenden Beschleunigungen, d. h. die Projektionen von p auf die Achsen, so sind diese nach S. 6 zugleich die Beschleunigungen der drei Seiten- oder Projektionsbewegungen. D. h., wenn x, y, z die veränderlichen Koordinaten des Punktes, es ist

$$p_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d v_x}{dt} = \frac{X}{m};$$

$$p_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d v_y}{dt} = \frac{Y}{m};$$

$$p_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d v_z}{dt} = \frac{Z}{m}.$$

Es liegt dann die Aufgabe vor, hieraus durch Integration die Gleichungen der Projektionsbewegungen $x = f(t)$ u. s. w. zu entwickeln.

Zur Erleichterung der Ausführung der Rechnungen in bestimmten Fällen dienen einige allgemeine Sätze, bei deren Ableitung diejenigen Schritte ein für alle Mal gemacht werden, die man ohne diese Sätze in jedem besonderen Falle thun müsste.

I. Der Satz der Flächen.

Dieser Satz gilt nur für solche Bewegungen, bei denen die wirkende Kraft stets durch einen festen Punkt, das Centrum O, hindurchgeht.

Zunächst ist leicht zu erkennen, dass eine solche Bewegung in einer ebenen Bahnlinie erfolgen muss, dass sie nicht aus der durch die Anfangsgeschwindigkeit c und das Centrum O bestimmten Ebene E heraustreten kann. Da nämlich (Fig. 79) die Geschwindigkeit c und auch die Kraft K, mithin auch die Elementarbeschleunigung $p \cdot dt$ in der Ebene E liegen, so wird die Geschwindigkeit nach einem Zeittheilchen, welche die geometrische Summe von c und $p \cdot dt$ ist, auch in der Ebene E liegen, und da dieser Vorgang sich für jedes weitere Zeittheilchen in gleicher Weise abspielt, so bleibt die Geschwindigkeit v stets in der Ebene E. Man kann nun durch O zwei zu einander rechtwinklige, ebenfalls in der Ebene E liegende Achsen OX und OY ziehen, dann bleibt die Bewegung gänzlich in der Ebene XOY, und man bedarf der dritten Achse OZ gar nicht bei der Untersuchung solcher Bewegungen.

Fig. 79.

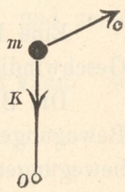
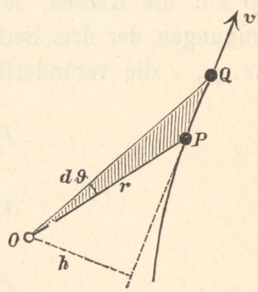


Fig. 80.



Ist nun PQ (Fig. 80) ein unendlich kleines Bewegungstheilchen $ds = v \cdot dt$ und bezeichnet man den rechtwinkligen Abstand des Centrums O von der Richtung der Geschwindigkeit v mit h, so ist leicht einzusehen, dass $v \cdot h$ konstant sein muss. Denn haben v und h zu Anfang die Werthe v_0 und h_0, so ist v die Resultirende oder die geometrische Summe aus v_0 und den Elementarbeschleunigungen $p \cdot dt$, welche während der Bewegung vom Anfange bis zu der Stelle P durch die Kraft K

geliefert wurden. Da nun nach 1. Theil, S. 101 der Satz der Drehmomente auch für Geschwindigkeiten gilt und die Elementarbeschleunigungen sämmtlich durch O gehen, also in Bezug auf O das Moment Null haben, so muss

$$-vh = -v_0 h_0 \quad \text{oder} \quad vh = v_0 h_0 \quad \text{sein.}$$

Zieht man nun die Fahrstrahlen OP und OQ, bezeichnet $\measuredangle POQ$ mit $d\vartheta$, die Fläche POQ mit dF, so ist

$$dF = {}^1\!/_2 PQ \cdot h = {}^1\!/_2 v \cdot dt \cdot h = {}^1\!/_2 v_0 h_0 \cdot dt, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{dF}{dt} = {}^1\!/_2 v_0 h_0, \quad \text{d. h. konstant.}$$

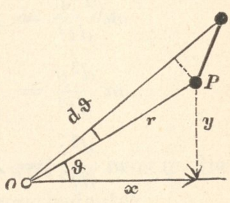
Setzt man $v_0 h_0 = v \cdot h = A$, so wird

1) $$\frac{dF}{dt} = \frac{A}{2} \quad \text{und} \quad dF = \frac{A}{2} dt,$$

d. h. in jedem Zeittheilchen dt wird von dem Fahrstrahl OP eine mit dt verhältnisgleiche Fläche dF beschrieben, folglich auch in gleichen endlichen Zeiten gleiche Flächen. Daher hat man den Satz:

Bei Bewegungen, bei denen die Kraft stets durch ein festes Centrum geht, liegt die Bahnlinie in der durch das Centrum und die Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene, und die von dem Centrum nach dem beweglichen Massenpunkte gezogenen Fahrstrahlen beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Fig. 81.



Die Fläche POQ kann mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung

2) $$dF = {}^1\!/_2 r^2 \cdot d\vartheta$$

geschrieben werden (Fig. 81). Will man diese Grösse durch die rechtwinkligen Koordinaten x und y des Punktes P ausdrücken, so bedenke man, dass

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}, \quad \text{also} \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

mithin

$$d\vartheta = d\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2}$$

3) $$\text{und} \quad r^2 d\vartheta = x \cdot dy - y \cdot dx \quad \text{wird.}$$

Im Anschluss an die Bezeichnung $ds:dt$ = Geschwindigkeit und $\omega = d\alpha : dt$ = Winkelgeschwindigkeit, nennt man $dF:dt$, d. h. die in der Zeiteinheit beschriebene Fahrstrahl-Fläche, die Flächen-Geschwindigkeit. Eine Bewegung, bei der die Kraft stets durch ein festes Centrum geht, erfolgt also mit gleichbleibender Flächengeschwindigkeit. Der analytische Ausdruck dafür ist

$$4)\qquad \frac{dF}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{dt} = \frac{A}{2},$$

wenn A eine Konstante bedeutet.

Dieser Satz rührt schon von Newton her. Ein Sonderfall ist das erste Kepler'sche Gesetz (S. 106).

2. Der Satz des Arbeitsvermögens. Kräftefunktion; Niveauflächen.

Der Satz des Arbeitsvermögens wurde freilich im 1. Theil, S. 48 schon allgemein bewiesen; er soll hier aber noch ein Mal in anderer Weise entwickelt und zu weiteren Schlüssen benutzt werden.

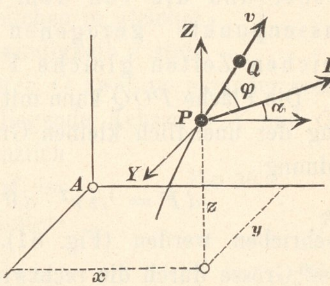
Zerlegt man die auf den Massenpunkt m wirkende Kraft K (Fig. 82) nach drei Achsenrichtungen in X, Y, Z und sind x, y, z die augenblicklichen Koordinaten von m, so ist

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y;$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Fig. 82.



Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit dx, dy und dz und zählt sie zusammen, so entsteht

$$m\left\{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt}\right\} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Nun ist $$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt} = \frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

und weil $$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

so kann man obige Gleichung auch schreiben:

$$1)\qquad m\,d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Die linke Seite ist die während der Zeit dt erfolgende Zunahme des Arbeitsvermögens (1. Theil, S. 44) des Punktes m, die rechte Seite aber die Summe der Arbeiten der drei Seitenkräfte X, Y und Z. Denn ist $PQ = ds$ das in der Zeit dt beschriebene Bahntheilchen, sind dx, dy, dz dessen Projektionen auf die Achsen, so ist nach 1. Theil, S. 42 $X \cdot dx$ die von X geleistete Arbeit. Im 1. Theil, S. 43 wurde schon bewiesen, dass die Arbeitssumme von X, Y und Z gleich der Arbeit der Mittelkraft K sei. Es ergiebt sich dies auch leicht in folgender Weise: Sind α, β und γ die Richtungswinkel von K gegen die Achsen, also

$$2)\qquad K \cos\alpha = X;\quad K\cos\beta = Y;\quad K\cos\gamma = Z;$$

sind ferner α_1, β_1 und γ_1 die Richtungswinkel von ds oder v, d. h.

$$3)\qquad ds\cdot\cos\alpha_1 = dx;\quad ds\cdot\cos\beta_1 = dy;\quad ds\cdot\cos\gamma_1 = dz;$$

und nennt man φ den Winkel, welchen K mit ds (oder v) einschliesst, so gilt (vergl. 2. Theil, S. 226)

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1,$$

oder wenn man alle Glieder dieser Gleichung mit $K \cdot ds$ multiplicirt und die Gl. 2 und 3 benutzt:

$$4)\qquad K\cdot ds\cdot\cos\varphi = X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz,$$

mithin nach Gl. 1:

$$d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = K\cdot ds\cdot\cos\varphi;$$

die rechte Seite ist die Arbeit der Kraft K, weil $ds\cdot\cos\varphi$ die in der Richtung von K zurückgelegte Wegeslänge bedeutet.

Hat der Punkt m an dem Orte x_0, y_0, z_0 die Geschwindigkeit v_0, an dem Orte x_1, y_1, z_1 die Geschwindigkeit v_1, so ergiebt sich für diese endliche Bewegung der Satz des Arbeitsvermögens

$$5)\qquad \frac{m {v_1}^2}{2} - \frac{m {v_0}^2}{2} = \int X dx + Y dy + Z dz = \int K\cdot ds\cdot\cos\varphi.$$

Die Grenzen für die Integrationen auf der rechten Seite sind durch Anfangs- und Endlage des Punktes m bedingt. Gl. 5 ist offenbar der Satz des Arbeitsvermögens (der kinetischen Energie oder der lebendigen Kraft), d. h. es ist die Zunahme des Arbeitsvermögens gleich der verrichteten Arbeit.

Es werde nun die Voraussetzung gemacht, dass 1. die Kraft K und somit auch ihre Seitenkräfte reine Funktionen des Ortes seien, also jedes Mal wieder denselben Werth annehmen, so oft der Punkt m sich wieder an demselben Orte befinde und dass 2. die Seitenkräfte X, Y und Z die theilweisen (partiellen) Abgeleiteten einer Funktion U nach bezw. x, y und z darstellen, d. h.

$$6)\qquad X = \frac{\delta U}{\delta x}; \quad Y = \frac{\delta U}{\delta y}; \quad Z = \frac{\delta U}{\delta z}.$$

Dann ist U auch eine reine Funktion des Ortes, und es lässt sich das Arbeitstheilchen

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{\delta U}{\delta x} dx + \frac{\delta U}{\delta y} dy + \frac{\delta U}{\delta z} dz$$

schreiben, d. h. als das vollständige (totale) Differential einer Funktion U darstellen und $= dU$ setzen. Unter dieser Voraussetzung wird aus Gl. 1:

$$7)\qquad d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = dU, \quad \text{daher}$$

$$8)\qquad \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int dU = U_1 - U_0,$$

wenn U_0 und U_1 diejenigen Werthe der Funktion U sind, welche dem Anfangs- bezw. dem Endorte des Punktes m entsprechen. Die Funktion U, welche den Gl. 6 genügt, heisst **Kräftefunktion.** Entspricht der wirkenden Kraft eine Kräftefunktion, so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens eines Punktes m gleich dem Unterschiede der beiden, der Anfangs- und Endlage entsprechenden Werthe dieser Funktion.

U_0 ist derjenige besondere Werth, den die Kräftefunktion $U = f(x, y, z)$ annimmt, wenn man in dieselbe die Koordinaten x_0, y_0, z_0 der Anfangsstelle des Punktes m einsetzt, d. h. es ist $U_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Ausser diesem Anfangspunkte der Bewegung giebt es aber noch unendlich viele andere Punkte im Raume, deren Koordinaten der Kräftefunktion den gleichen Werth U_0 geben.

Der Inbegriff oder Ort aller dieser Punkte ist eine Fläche, die wir auch U_0 nennen wollen und deren Gleichung

9) $$f(x, y, z) = U_0 \text{ ist.}$$

Hätte z. B. die Kräftefunktion die einfache Form $U = x^2 + y^2 + z^2$ und wäre für den Anfang $x_0 = 1$; $y_0 = 2$; $z_0 = 3$, so würde $U_0 = 14$. Setzt man aber

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14,$$

so ist dies die Gleichung einer Kugelfläche vom Halbmesser $\sqrt{14}$; die Koordinaten eines jeden Punktes dieser Kugelfäche genügen der Gleichung derselben, geben also der Funktion U den gleichen Wert 14. Hat der Punkt m zu Ende der Beobachtung die Koordinaten $x_1 = 10$; $y_1 = 12$; $z_1 = 13$, so wird $U_1 = 413$, und

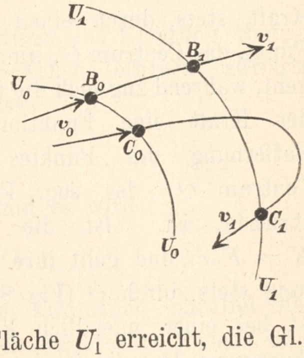
$$x^2 + y^2 + z^2 = 413$$

ist die Gleichung einer Kugelfläche U_1 vom Halbmesser $r_1 = \sqrt{414}$, deren Koordinaten der Funktion U den Werth $U_1 = 413$ geben. Die Gleichungen der Flächen U_0 und U_1 unterscheiden sich nur durch die Konstante U_0 bezw. U_1; die Flächen gehören derselben Gattung an, sind nämlich Kugelflächen mit gemeinsamem Mittelpunkte.

Ebenso sind U_0 und U_1 bei beliebiger Form der Kräftefunktion Flächen derselben Art und unterscheiden sich nur durch die Konstante U_0 bezw. U_1.

In Fig. 83 mögen die krummen Linien $U_0 U_0$ und $U_1 U_1$ die Durchschnittslinien zweier solchen Flächen U_0 und U_1 mit irgend einer anderen Fläche bedeuten. Bewegt sich ein Massenpunkt m unter Einwirkung einer Kraft K, der die Kräftefunktion U entspricht, auf verschiedenen Bahnlinien $B_0 B_1$ und $C_0 C_1$, so ändert sich das Arbeitsvermögen stets um den gleichen Werth $U_1 - U_0$, wenn der Punkt von irgend einer Stelle der Fläche U_0 zu irgend einer Stelle der Fläche U_1 gelangt. Hatte er beim Durchschneiden der Fläche U_0 die Geschwindigkeit v_0, so gilt für die Geschwindigkeit v_1, mit der er die Fläche U_1 erreicht, die Gl.:

Fig. 83.



$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = U_1 - U_0.$$

Kehrt er aber bei seiner Bewegung zur Fläche U_0 zurück, so hat er auch wieder die Geschwindigkeit v_0.

Verlässt der Massenpunkt bei seiner Bewegung die Fläche U_0 gar nicht, beschreibt er vielmehr irgend eine in dieser Fläche liegende Bahn, so bleibt seine Geschwindigkeit stets v_0, es wird also die Arbeit der Kraft K für jedes Bewegungstheilchen Null, d. h.

$$K \cdot ds \cdot \cos \varphi = 0, \quad \text{also}$$

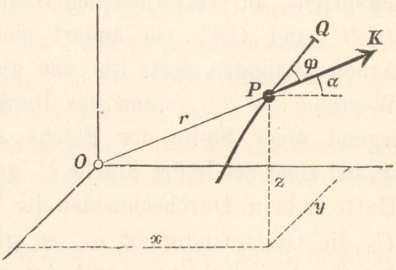
$$\cos \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = {}^1\!/_2\, \pi.$$

Dies bedeutet, dass die Kraft K zu jeder in der Fläche U_0 befindlichen Bahnlinie, also auch zu der Fläche U_0 selbst rechtwinklig steht. Gleiches gilt von der Fläche U_1. Diese Flächen U_0 und U_1 heissen **Niveauflächen.**

Lässt sich das Arbeitstheilchen der Kraft K als das vollständige Differential einer Funktion U darstellen, so giebt es für K eine Kräftefunktion, nämlich U, und auch durch jeden Punkt des Raumes, für welchen K noch einen endlichen Werth hat, eine Niveaufläche. Diejenigen Linien, welche alle Niveauflächen rechtwinklig schneiden, heissen Kraftlinien. Die möglichen Richtungen von K bilden Tangenten an die Kraftlinien.

Bei Centralbewegungen giebt es eine Kräfte-Funktion. Unter Centralbewegungen versteht man solche, bei denen die wirkende Kraft stets durch einen festen Punkt, das Centrum O, hindurchgeht, während zugleich die Grösse der Kraft eine Funktion der Entfernung des Punktes vom Centrum O, des sog. Fahrstrahls, ist. Ist die Kraft $K = F(r)$ und geht ihre Richtung stets durch O (Fig 84), so ist bei einer unendlich kleinen Bewegung PQ die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge, d. h. die Projektion von PQ auf die Richtung von r, einfach dr, daher das Arbeitstheilchen

Fig. 84.



$$K \cdot ds \cdot \cos \varphi = K \cdot dr = F(r) \cdot dr.$$

Da dies eine Differentialfunktion von nur einer Veränderlichen ist, so ist es ein vollständiges Differential, man kann es daher schreiben

$$dU = K \cdot dr, \quad \text{also ist}$$

10) $$U = \int K \cdot dr + C$$

die Kräftefunktion einer Centralbewegung.

Man überzeugt sich auch leicht, dass $X = \frac{\partial U}{\partial x}$. Denn, da U als eine $f(r)$ gefunden, so wird

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{dr}{dx} = K \cdot \frac{dr}{dx};$$

aus $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ wird aber

$$\frac{dr}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = K \cdot \frac{x}{r} = K \cos \alpha = X.$$

Die Kraftlinien sind vom Centrum nach allen Richtungen ausgehende geradlinige Strahlen. Da diese Kraftlinien von den Niveauflächen rechtwinklig geschnitten werden müssen, so sind letztere offenbar Kugelflächen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt O.

In dem besonderen Falle der nach Grösse und Richtung überall gleichen Schwere ist, wenn man die z-Achse lothrecht abwärts nimmt, das Arbeitstheilchen von der Grösse

$$mg \cdot dz,$$

d. h. ein vollständiges Differential dU, und es wird

$$U = mg \cdot z + C$$

die Kräftefunktion. Da die Kraftlinien sämmtlich parallel der z-Achse sind, so müssen die Niveauflächen wagerechte Ebenen sein.

Sobald jedoch Reibungs- und Mittelwiderstände auftreten, die stets entgegengesetzt der Bewegungsrichtung wirken, sich also mit der Umkehrung der Bewegung ebenfalls umkehren, giebt es keine Kräftefunktion, also auch keine Niveauflächen.

3. Bewegung eines Massenpunktes unter Wirkung einer von einem Centrum ausgehenden, mit der Entfernung von diesem verhältnisgleichen Anziehungskraft.

Da diese Bewegung eine Centralbewegung ist, so muss sie nach S. 84 in einer ebenen Bahnlinie erfolgen, die daher auf nur zwei Achsen OX und OY bezogen werden braucht. Der Punkt befinde sich (Fig. 85) zu Anfang an der auf der OY befindlichen Stelle A im Abstand $OA = y_0$ vom Centrum O und habe eine beliebig gerichtete Anfangsgeschwindigkeit c, welche in c_x und c_y zerlegt werden kann. Da c nicht mit der Kraftrichtung AO zusammenfällt, so muss nach S. 83 eine krummlinige Bewegung entstehen. Dieser Fall ist eine Verallgemeinerung der S. 53 behandelten geradlinigen Schwingung, in so fern die Anziehungskraft K demselben Gesetz unterworfen ist. Wir drücken deshalb K auch wieder in derselben Weise

1) $$\boldsymbol{K = m \cdot k^2 \cdot r}$$

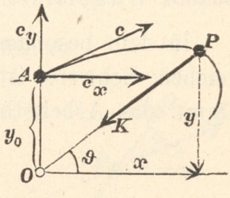
aus, so dass k^2 die Beschleunigung im Abstand Eins von dem Centrum bedeutet.

Da die Seitenkräfte von K in der Richtung der beiden Achsen im Sinne dieser Achsen negativ sind, so wird in der x-Richtung die Beschleunigung

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 r \cdot \cos \vartheta = -k^2 x,$$

weil $r \cos \vartheta = x$ ist. Entsprechendes gilt für die y-Richtung. Die beiden Beschleunigungsgleichungen

Fig. 85.



2) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$$

lassen sich in diesem Falle ganz unabhängig von einander integriren. Wir bedürfen hier der allgemeinen Lösung der Differentialgleichungen 2 und müssen deshalb etwas anders verfahren als auf S. 54. $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ multipliciren wir auf beiden Seiten mit $2\,dx$ und schreiben

$$2\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt} = -2k^2 \cdot x \cdot dx.$$

Dies giebt, integrirt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -k^2x^2 + e^2,$$

wo e^2 die noch unbestimmt gelassene Integrations-Konstante bedeutet. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{e^2 - k^2x^2}} = \frac{1}{k}\,\frac{d\left(\frac{kx}{e}\right)}{\sqrt{1 - \frac{k^2x^2}{e^2}}}$$

mit
$$t = \frac{1}{k}\arcsin\frac{kx}{e} + \frac{\alpha}{k},$$

worin $\frac{\alpha}{k}$ wieder eine Integrations-Konstante bedeutet. Letztere Gleichung lässt sich umschreiben in

$$\frac{k}{e}x = \sin(kt - \alpha) \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{e}{k}\sin(kt - \alpha) = \frac{e}{k}\sin kt \cdot \cos\alpha - \frac{e}{k}\cos kt \cdot \sin\alpha$$

oder, wenn man die noch unbestimmten Konstanten

$$\frac{e}{k}\cos\alpha \quad \text{und} \quad \frac{e}{k}\sin\alpha$$

mit A bezw. $-B$ vertauscht:

3) $$x = A\sin kt + B\cos kt$$

und ebenso für die andere Achsenrichtung

4) $$y = C\sin kt + D\cos kt.$$

Die noch unbestimmten Werthe A, B, C und D müssen aus dem Anfangszustand ermittelt werden. Für $t = 0$ ist

$$x = 0; \qquad y = y_0;$$
$$v_x = c_x; \qquad v_y = c_y.$$

Aus Gl. 3 und 4 ergiebt sich aber durch Differentiation:

5) $$v_x = \frac{dx}{dt} = Ak \cdot \cos kt - Bk \cdot \sin kt,$$

6) $$v_y = \frac{dy}{dt} = Ck \cdot \cos kt - Dk \cdot \sin kt.$$

Setzt man in die Gl. 3—6 die Anfangswerthe mit $t = 0$ ein, so erhält man

$$0 = A \cdot \sin 0 + B \cdot \cos 0, \quad \text{d. h.} \quad 0 = B \cdot 1 \quad \text{oder} \quad B = 0;$$

$$y_0 = C \cdot 0 + D \cdot 1, \quad \text{d. h.} \quad D = y_0;$$

$$c_x = A \cdot k \cdot 1 - 0 \cdot k \cdot 0, \quad \text{d. h.} \quad A = \frac{c_x}{k};$$

$$c_y = C \cdot k \cdot 1 - D \cdot k \cdot 0, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{c_y}{k}.$$

Hiermit geben Gl. 3 und 4 die bestimmten Bewegungsgleichungen

7) $$x = \frac{c_x}{k} \cdot \sin kt,$$

8) $$y = \frac{c_y}{k} \cdot \sin kt + y_0 \cdot \cos kt.$$

Um die Gleichung der Bahnlinie zu erhalten, also t zu entfernen, muss man Gl. 7 und 8 nach $\sin kt$ und $\cos kt$ auflösen, beide quadriren und die Summe der Quadrate mit 1 vertauschen. Es wird aus Gl. 7:

$$\sin kt = \frac{k}{c_x} \cdot x$$

und, mit Einführung dieses Werthes in Gl. 8, aus dieser

$$\cos kt = \frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{k \cdot y_0} \cdot \sin kt = \frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{c_x \cdot y_0} \cdot x; \quad \text{mithin}$$

$$1 = \frac{k^2 x^2}{c_x^2} + \left(\frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{c_x \cdot y_0} \cdot x\right)^2.$$

Dies giebt, geordnet:

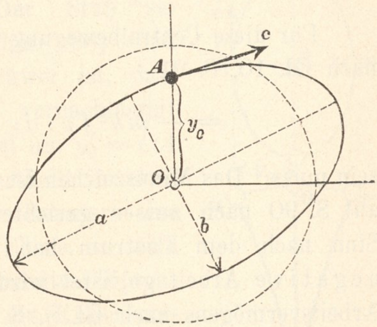
9) $$x^2 (k^2 y_0^2 + c_y^2) + y^2 c_x^2 - 2\, xy\, c_x c_y = c_x^2 y_0^2.$$

Diese Gleichung zweiten Grades bedeutet eine Kegelschnittlinie, u. zw., da

$$(k^2 y_0^2 + c_y^2)\, c_x^2 - (c_x \cdot c_y)^2 = k^2 y_0^2 c_x^2 + c_x^2 \cdot c_y^2 - c_x^2 \cdot c_y^2$$
$$= k^2 y_0^2 c_x^2 > 0,$$

eine Ellipse; da in Gl. 9 Glieder mit x und y allein in der ersten Potenz nicht vorkommen, so fällt der Mittelpunkt der elliptischen Bahnlinie mit dem Centrum O zusammen; nur liegen, wegen des mit $x \cdot y$ behafteten Gliedes, die Hauptachsen $2a$ und $2b$ der Ellipse schief gegen das Achsenkreuz, was durch die schiefe Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c verursacht wird (Fig. 86).

Fig. 86.



In der gekrümmten Bahnlinie kann die Geschwindigkeit an keiner Stelle Null werden, weil an einer solchen Stelle die Bewegung in eine geradlinige, nach O gerichtete übergehen müsste, was aber der elliptischen Bahnlinie widersprechen würde. Die Ellipse muss also in dem gleichen Umfahrungssinne fortwährend durchlaufen werden. Die Zeit eines Umlaufes ist

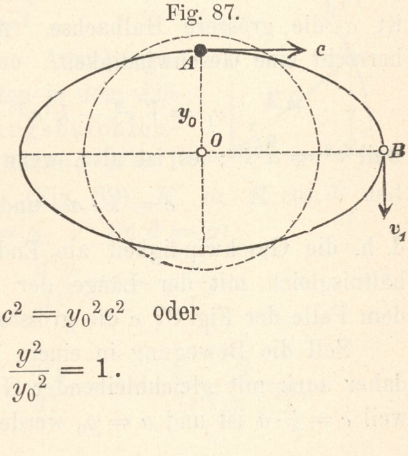
10)
$$t_1 = \frac{2\pi}{k},$$

weil x, y, v_x und v_y nach der Gl. 3—6 stets wieder dieselben Werthe annehmen, wenn sich der Winkel kt um 2π, also t um $2\pi : k$ geändert hat.

Die Umlaufszeit nach Gl. 10 entspricht der Dauer einer Doppelschwingung nach S. 55. Für $y_0 = 0$, d. h. für den Fall, dass der Punkt m in der Gleichgewichtslage, dem Centrum, die Geschwindigkeit c bekommt, geht die Gl. 9 in die Gleichung einer geraden, mit der Richtung von c zusammenfallenden Linie

$$y = \frac{c_y}{c_x} \cdot x \quad \text{über.}$$

Fig. 87.



Für den einfacheren Fall, dass die Anfangsgeschwindigkeit c im Punkt A parallel der OX ist (Fig. 87), also $c_x = c$, $c_y = 0$, geht Gl. 9 über in

$$x^2 k^2 y_0^2 + y^2 c^2 = y_0^2 c^2 \quad \text{oder}$$

11)
$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihre Hauptachsen mit den Halbachsen

$$a = \frac{c}{k} = OB \quad \text{und} \quad b = y_0 = OA.$$

Für diese Centralbewegung giebt es eine Kräftefunktion, welche nach Gl. 10, S. 91

$$U = -mk^2 \int r \cdot dr + C = -\frac{mk^2r^2}{2} + C$$

sein muss. Das Minuszeichen ist dadurch begründet, dass die Kraft K auf S. 90 nach aussen gerichtet angenommen war, hier aber den Sinn nach dem Centrum hat, so dass bei zunehmendem r eine negative Arbeit geleistet wird. Hiernach ist die Gleichung des Arbeitsvermögens nach Gl. 8, S. 88

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = -\frac{mk^2}{2}(r^2 - y_0^2)$$

und daher die Geschwindigkeit an beliebiger Stelle

12) $$v = \sqrt{c^2 - k^2(r^2 - y_0^2)}.$$

Von den Niveaukugeln (S. 91) kommen nur die Grösstkreise als Niveaukreise in Betracht. An den vier Schnittpunkten der Bahnlinie mit einem solchen (in Fig. 86 und 87 punktirten) Kreise hat der Punkt m die gleiche Geschwindigkeit. Je mehr er sich vom Centrum entfernt, desto kleiner wird seine Geschwindigkeit. Ist in dem Falle der Fig. 87 $a = \frac{c}{k} > y_0$, also $c > k \cdot y_0$, so ist a die grössere Halbachse. Am Endpunkte derselben, bei B, herrscht eine Geschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{c^2 - k^2a^2 + k^2y_0^2} = k \cdot y_0,$$

weil $c^2 = a^2k^2$; es ist also, wenn man y_0 mit b vertauscht,

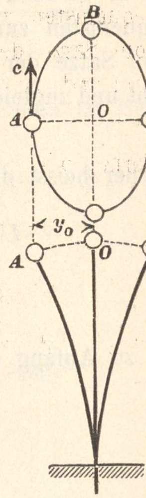
$$c = k \cdot a \quad \text{und} \quad v_1 = k \cdot b,$$

d. h. die Geschwindigkeit am Ende der einen Halbachse ist verhältnisgleich mit der Länge der anderen Halbachse. Es ist in dem Falle der Fig. 87 c die grösste, v_1 die kleinste Geschwindigkeit.

Soll die Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser y_0 und daher auch mit gleichbleibender Geschwindigkeit erfolgen, so muss, weil $c = k \cdot a$ ist und $a = y_0$ werden soll, $c = k \cdot y_0$ gemacht werden.

Diese Bewegung kommt, wenigstens annäherungsweise, vor, wenn die Kraft K durch den nach allen Richtungen gleichen Biegungswiderstand eines geraden elastischen Stabes von kreisförmigem Querschnitte geliefert wird. Der Stab sei unten lothrecht eingespannt (Figur 88) und trage oben eine Kugel, die so schwer ist, dass dagegen die Masse des Stabes vernachlässigt werden kann. Bringt man die Kugel um $y_0 = OA$ aus der Gleichgewichtslage O und ertheilt ihr etwa mit der Hand oder mittels eines Hammers eine Geschwindigkeit c in wagerechter Ebene, so wird der Mittelpunkt der Kugel die behandelte Ellipsenbewegung ausführen. Lässt man die Kugel einfach los ($c = 0$), so schwingt sie in einem schwachen Bogen AOC, und ihre wagerechte Seitenbewegung folgt annähernd den Gesetzen der geradlinigen Schwingung (S. 53).

Fig. 88.

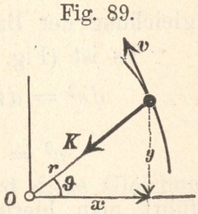


4. Bewegung der Himmelskörper unter Einwirkung der Massenanziehung nach dem Newton'schen Gesetze.

Für eine von einem Centralpunkt m_1 angezogene Masse m im Abstand r vom Centrum kann man (nach 1. Theil, S. 55) die Anziehungskraft

1) $$K = \frac{k \cdot m_1 m}{r^2} = \frac{mq}{r^2}$$

Fig. 89.



schreiben. Darin bedeutet k die Anziehungskraft zwischen zwei Masseneinheiten in dem Abstand $r = 1$, q die Anziehungsbeschleunigung der Masse m im Abstand $r = 1$ vom Centrum. Zerlegt man (Fig. 89) K in $K \cos \vartheta$ und $K \sin \vartheta$, so wird weil $r \cdot \cos \vartheta = x$, $r \cdot \sin \vartheta = y$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -q \frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{y}{r^3}$$

oder mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -q \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich, weil sie beide x und y enthalten, nicht von einander unabhängig integriren, wie dies mit Gl. 2, S. 92 leicht geschehen konnte. Vielmehr gelangt man am bequemsten zur Gleichung der Bahnlinie, wenn man unmittelbar vom Satze der Flächen und vom Satze des Arbeitsvermögens ausgeht und zugleich Polarkoordinaten anwendet. Es ist nach Gl. 4, S. 86

2) $$r^2 \cdot d\vartheta = A \cdot dt.$$

Ferner heisst die Kräftefunktion dieses Falles nach Gl. 10. S. 91

$$U = \int K dr + C = -k m_1 m \int \frac{dr}{r^2} + C$$
$$= \frac{k \cdot m_1 m}{r} + C = \frac{m q}{r} + C.$$

Ist zu Anfang $r = r_0$ und $v = v_0$, so wird nach Gl. 8, S. 88

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \frac{mq}{r} - \frac{mq}{r_0}, \text{ also}$$
$$v^2 = \frac{2q}{r} - \left(\frac{2q}{r_0} - v_0^2\right),$$

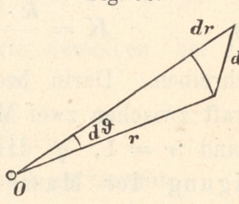
oder, wenn man den konstanten Werth

$$\frac{2q}{r_0} - v_0^2 = h \text{ setzt:}$$

3) $$v^2 = \frac{2q}{r} - h.$$

Gl. 2 und 3 müssen nun so umgewandelt werden, dass man aus ihnen nach Entfernung von t die Differentialgleichung der Bahnlinie erhält.

Fig. 90.



Es ist (Fig. 90)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2, \text{ also}$$
$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{dt^2};$$

führt man hierin aus Gl. 2 den Werth $dt = \frac{r^2}{A} d\vartheta$ ein, so wird mit Benutzung von Gl. 3:

$$\frac{2q}{r} - h = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{r^4 d\vartheta^2} \cdot A^2,$$

oder, nach $d\vartheta$ aufgelöst:

4) $$d\vartheta = \frac{A \cdot dr}{\sqrt{2qr^3 - hr^4 - A^2 r^2}}.$$

Zum Zwecke der Integration, setzt man $r = \frac{1}{u}$ mit $dr = -\frac{du}{u^2}$, dann wird $d\vartheta = -\frac{A \cdot du}{u^2\sqrt{\frac{2q}{u^3} - \frac{h}{u^4} - \frac{A^2}{u^2}}} = -\frac{A \cdot du}{\sqrt{2qu - h - A^2u^2}}$.

Um das Glied mit der ersten Potenz der Veränderlichen im Nenner zu entfernen, setze man $u = z + b$; dann wird

$$2qu - h - A^2u^2 = 2qz + 2qb - h - A^2z^2 - 2bA^2z - A^2b^2.$$

Man wählt nun b derartig, dass $2qz - 2bA^2z = 0$ werde, d. h.

$$b = \frac{q}{A^2} \quad \text{und} \quad z = u - \frac{q}{A^2}. \tag{5}$$

Hiermit wird

$$2qu - h - Au^2 = \frac{2q^2}{A^2} - h - A^2z^2 - \frac{q^2}{A^2} \quad \text{und}$$

$$d\vartheta = -\frac{A\,dz}{\sqrt{\left(\frac{q^2}{A^2} - h\right) - A^2z^2}}.$$

Hieraus folgt das unbestimmte Integral

$$\vartheta = \arccos\frac{Az}{\sqrt{\frac{q^2}{A^2} - h}} = \arccos\frac{\frac{A^2}{q}z}{\sqrt{1 - h\frac{A^2}{q^2}}},$$

also wegen

$$z = u - \frac{q}{A^2} = \frac{1}{r} - \frac{q}{A^2}:$$

$$\vartheta - \alpha = \arccos\frac{\frac{A^2}{qr} - 1}{\sqrt{1 - h\frac{A^2}{q^2}}},$$

worin α die Integrationskonstante bedeutet. Wird diese Gleichung nach r aufgelöst, so erhält man

$$r = \frac{\frac{A^2}{q}}{1 + \sqrt{1 - \frac{hA^2}{q^2}} \cdot \cos(\vartheta - \alpha)}. \tag{6}$$

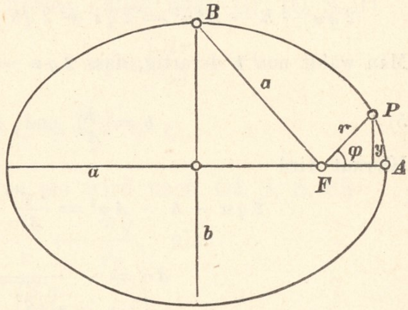
Dies ist die Polargleichung eines auf seinen Brennpunkt F als Pol bezogenen Kegelschnittes.

Geht man nämlich von der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

aus, so findet man (Fig. 91) den Brennpunkt F, indem man $BF = a$ macht. Der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte wird bekanntlich $= a \cdot \varepsilon$ gesetzt und ε die numerische Excentricität des Kegelschnitts genannt (für den Kreis würde $\varepsilon = 0$ sein). Hiermit und mit

Fig. 91.



7) $\quad b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$

wird die Mittelpunktsgleichung

8) $\quad y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$

Ist nun F der Pol, FA die Polarachse, so gilt für einen Punkt P, dessen Polarkoordinaten φ und r sind,

$$r = \sqrt{y^2 + (x - a\varepsilon)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + \varepsilon^2 x^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2} = a - \varepsilon x;$$

da ferner $\qquad x = a \cdot \varepsilon + r \cdot \cos\varphi,$

so wird $\qquad r = a - a \cdot \varepsilon^2 - \varepsilon \cdot r \cos\varphi, \quad$ also

9) $$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Der Zähler $a(1 - \varepsilon^2)$ ist nämlich die dem Brennpunkt F entsprechende Ordinate und werde mit p bezeichnet; denn $x = a\varepsilon$ giebt nach Gl. 8:

$$y = a(1 - \varepsilon^2).$$

Bei der Ellipse ist b reell, daher $b^2 > 0$, also nach Gl. 7

$$(1 - \varepsilon^2) > 0, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon^2 < 1.$$

Die Hyperbel unterscheidet sich von der Ellipse dadurch, dass b imaginär, b^2 negativ, nach Gl. 7 somit

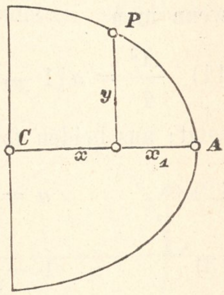
$$(1 - \varepsilon^2) < 0, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon^2 > 1 \quad \text{ist.}$$

Lässt man ε^2 durch stetige Änderung von Werthen < 1 zu Werthen > 1 übergehen, so hat man in dem Zwischenwerth

$$\varepsilon^2 = 1$$

den Übergangsfall zwischen Ellipse und Hyperbel, der als Grenzfall sowohl der Ellipse wie der Hyperbel zugerechnet werden kann. Damit nun für $\varepsilon^2 = 1$ der Brennstrahl r in Gl. 9 nicht zu Null werde, muss offenbar $a = \infty$ sein. Daher ist die Parabel derjenige Kegelschnitt, dessen Excentricität $\varepsilon = 1$ und dessen grosse Halbachse a unendlich gross ist.

Fig. 92.



Dass hierfür thatsächlich die Ellipsengleichung in die Parabelgleichung übergeht, ergiebt sich leicht; nur muss man, damit der Anfangspunkt der Koordinaten nicht in unendliche Ferne gehe, die Scheitelgleichung der Ellipse benutzen. Vertauscht man (Fig. 92) in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

x mit $a - x_1$, b^2 mit $a^2(1 - \varepsilon^2)$, so wird

$$\frac{(a - x_1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1$$

und daraus $\quad y^2 = 2a(1 - \varepsilon^2)x_1 - (1 - \varepsilon^2)x_1{}^2.$

Soll dies in die Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2px$ übergehen, so muss

$$\varepsilon^2 = 1 \quad \text{und} \quad a(1 - \varepsilon^2) = p, \quad \text{d. h.} \quad a = \infty \quad \text{werden.}$$

Gl. 9 bezeichnet daher eine

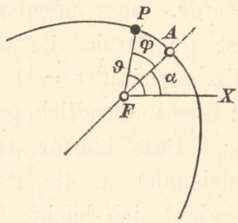
$$10) \quad \left| \begin{array}{lll} \text{Ellipse,} & \text{wenn} & 1 - \varepsilon^2 > 0, \\ \text{Parabel,} & „ & 1 - \varepsilon^2 = 0, \\ \text{Hyperbel,} & „ & 1 - \varepsilon^2 < 0. \end{array} \right.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass Gl. 6 mit Gl. 9 im Wesentlichen übereinstimmt. Bei Gl. 6 fällt die Polarachse nicht mit der grossen Halbachse a der Ellipse zusammen, sondern liegt um den Winkel α dagegen verdreht. Denn nicht für $\vartheta = 0$, sondern für $\vartheta = \alpha$

erreicht $\cos(\vartheta - \alpha)$ seinen grössten Werth, daher r seinen kleinsten Werth FA. Vertauscht man (Fig. 93) $\vartheta - \alpha$ mit φ, so ist die Uebereinstimmung zwischen den Gl. 6 und 9 hinsichtlich der Veränderlichen erreicht.

Die Bedeutung der Konstanten der Gl. 6 für die Bahnlinie der entsprechenden Bewegung ergiebt sich nun, wenn man

Fig. 93.



11) $$\frac{A^2}{q} = a(1 - \varepsilon^2); \quad 1 - \frac{hA^2}{q^2} = \varepsilon^2$$

setzt; aus beiden folgt

12) $$a = \frac{q}{h} \quad \text{und}$$

13) $$1 - \varepsilon^2 = h\frac{A^2}{q^2}.$$

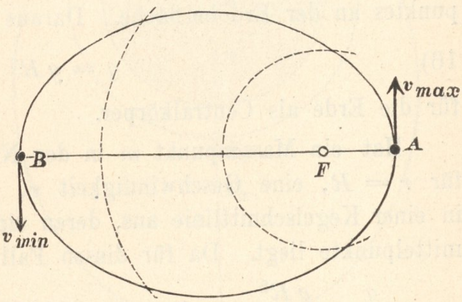
Da $\frac{A^2}{q^2}$ stets positiv, so ist $1 - \varepsilon^2 \gtreqless 0$ wenn $h \gtreqless 0$ ist.

Nach Gl. 3 war nun aber $h = \frac{2q}{r} - v^2$, so dass das Vorzeichen von h, also auch dasjenige von $1 - \varepsilon^2$, abhängt von $2q - rv^2$. Eine elliptische Bahnlinie verlangt $1 - \varepsilon^2 > 0$, d. h. $h > 0$, also $2q > v^2 r$. Da nun $q = k \cdot m_1$ für einen gegebenen Centralpunkt eine konstante Grösse ist, so darf der Massenpunkt in einem Abstand r vom Centrum nur eine solche Geschwindigkeit v haben, dass $rv^2 < 2q$ ist, wenn eine elliptische Bahnlinie entstehen soll. Damit die Bahnlinie aber im Besonderen kreisförmig werden könne, muss die Anziehungs-Beschleunigung $\frac{q}{r^2}$ der erforderlichen Centripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{r}$ gleich sein, d. h. $rv^2 = q$. Für $rv^2 = 2q$ wird $h = 0$, $\varepsilon^2 = 1$, die Bahnlinie eine Parabel; für $rv^2 > 2q$ wird $h < 0$, $\varepsilon^2 > 1$, die Bahnlinie eine Hyperbel; oder, zusammengestellt, die Bahnlinie wird

14) $$\left\{ \begin{array}{lll} \text{ein Kreis} & \text{für} & v^2 r = q, \\ \text{eine Ellipse} & \text{„} & v^2 r < 2q, \\ \text{„ Parabel} & \text{„} & v^2 r = 2q, \\ \text{„ Hyperbel} & \text{„} & v^2 r > 2q. \end{array} \right.$$

Bekommt also der Massenpunkt m in einem Abstand r vom Centrum die Geschwindigkeit v etwa durch einen Stoss, eine Explosion oder dergl. so hängt es nur von der Grösse der Geschwindigkeit ab, ob er eine geschlossene Ellipse mit dem Centrum als Brennpunkt beschreibt, oder in einer hyperbolischen Bahnlinie in unendliche Ferne geht. Diese Fälle einer elliptischen Bahnlinie unterscheiden sich von der auf S. 92 behandelten elliptischen Bewegung dadurch, dass das Centrum dort den Mittelpunkt, jetzt aber den einen Brennpunkt der Ellipse bildet, dass also die Niveaukreise eine völlig andere Lage gegen die Bahnlinie haben (vergl. Fig. 94 mit Fig. 87). Da

Fig. 94.



$$v^2 = \frac{2q}{r} - h$$

(Gl. 3) ist, so wird die Geschwindigkeit am grössten für r_{min}, d. h. in der Centrumsnähe bei A, am kleinsten für r_{max}, d. h. in der Centrumsferne bei B.

Umlaufszeit.

Die Zeit, in welcher die elliptische Bahnlinie einmal durchlaufen wird, ergiebt sich einfach aus dem Satze der Flächen, Gl. 4, S. 86:

$$dF = {}^1\!/_2 A \cdot dt, \quad \text{daher}$$

$$F = {}^1\!/_2 A \cdot t \quad \text{oder}$$

$$t = \frac{2F}{A},$$

wenn F die ganze während eines Umlaufes von dem Fahrstrahle beschriebene Fläche der Ellipse ist. Da nun $F = a \cdot b \cdot \pi$; $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ und nach Gl. 11 $A = \sqrt{aq(1 - \varepsilon^2)}$, so wird

15) $$t = \frac{2a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,\pi}{\sqrt{aq(1 - \varepsilon^2)}} = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{q}}.$$

Der Mittelpunkt der Erde als Centrum.

Jeder Punkt ausserhalb der Erde erfährt von dieser eine Anziehungkraft, welche nach Gl. 1

$$K = \frac{mq}{r^2}$$

zu setzen ist. Nennen wir nun den Halbmesser der Erde R, so wird für $r = R$ die Kraft $K = mg$, dem Gewicht eines Massenpunktes an der Erdoberfläche. Daraus folgt $mg = \frac{mq}{R^2}$, d. h.

$$16)\qquad q = gR^2$$

für die Erde als Centralkörper.

Hat ein Massenpunkt m in der Nähe der Erdoberfläche, d. h. für $r = R$, eine Geschwindigkeit v, so führt er eine Bewegung in einer Kegelschnittlinie aus, deren einer Brennpunkt in dem Erdmittelpunkte liegt. Da für diesen Fall

$$\frac{q}{r} = \frac{gR^2}{R} = gR = 9{,}81 \cdot 6\,370\,000 = 62\,490\,000,$$

so wird die Bahnlinie nach Gl. 14

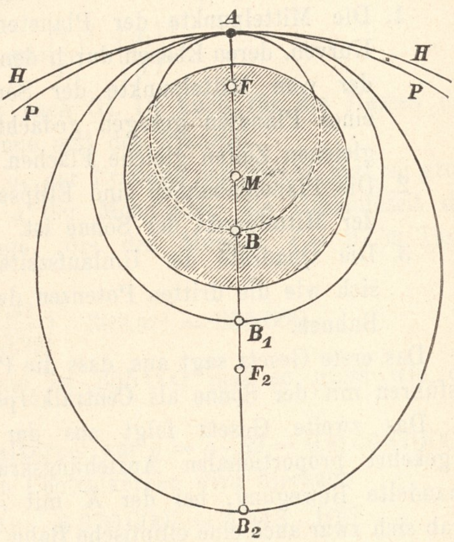
$$17)\left\{\begin{array}{lll} \text{ein Kreis} & \text{für } v = \sqrt{gR} = 7\,905 \text{ m/s.} & \text{(vergl. S. 57);} \\ \text{eine Ellipse} & \text{„ } v < \sqrt{2gR} = 11\,179 \text{ m/s.;} & \\ \text{„ Parabel} & \text{„ } v = \sqrt{2gR} = 11\,179 \text{ m/s.;} & \\ \text{„ Hyperbel} & \text{„ } v > \sqrt{2gR} = 11\,179 \text{ m/s..} & \end{array}\right.$$

Die gewöhnlichen Wurfbewegungen geschehen hiernach in Ellipsen, und zwar befindet sich der entferntere Brennpunkt im Mittelpunkte M der Erde (Fig. 95), während der andere Brennpunkt F in geringer Tiefe unter dem Anfangspunkt A der Bewegung liegt.

Hiernach ist die Wurfbewegung, die im 1. Theil, S. 48 als parabolisch bezeichnet wurde, richtiger eine elliptische zu nennen. Betrachtet man aber, wie es dort geschah, die Fallbeschleunigung als unveränderlich nach Grösse und Richtung, so wird dadurch der Erdhalbmesser als unendlich gross gegenüber der Länge der Bahnlinie eingeführt; dann ist auch die Halbachse a der Ellipse unendlich, und es wird die Ellipse nach S. 101 gleichbedeutend mit der Wurfparabel.

Wird die wagerecht gedachte Anfangsgeschwindigkeit grösser und grösser, so rückt der Brennpunkt F mehr und mehr nach M hin und fällt bei $v = 7905$ mit ihm zusammen; in diesem Fall ist die Bahnlinie der Kreis AB_1. Bei weiterer Zunahme von v rückt F über M hinaus, etwa nach F_2, und der Erdmittelpunkt M ist der dem Ausgangspunkt A nähere Brennpunkt der elliptischen Bahnlinie, welche sich nun bei B_2 weit von der Erde entfernen kann, aber immer noch wieder nach A zurückführt. Eine parabolische und hyperbolische Bahnlinie PAP und HAH für $v \geqq 11179$ sind in der Figur ebenfalls angedeutet.

Fig. 95.



Der Mittelpunkt der Sonne als Centrum.

Die Bewegung der Planeten und Kometen des Sonnensystems erfolgt unter Einwirkung einer von der Sonne ausgehenden Anziehungskraft $K = mq : r^2$. Weil nun allgemein (s. 1. Theil, S. 55)

$$18)\qquad K = k\frac{m m_1}{r^2} = \frac{mq}{r^2}$$

ist, so muss mit m_1 als Sonnenmasse,

$$q = k m_1,$$

d. h. nur von der Sonnenmasse abhängig sein. Mithin ist für alle die Sonne umlaufenden Planeten und Kometen q eine und dieselbe Grösse. Sind daher für zwei dieser Himmelskörper, deren Bahnlinien geschlossene Kurven bilden, a und a_1 die Halbachsen der Ellipsen, t und t_1 ihre Umlaufszeiten, so wird nach Gl. 15

$$19)\qquad \frac{t}{t_1} = \frac{a^{3/2}}{a_1^{3/2}}; \quad \frac{t^2}{t_1^{\,2}} = \frac{a^3}{a_1^{\,3}}.$$

Die vorstehenden Ergebnisse enthalten die von Kepler (geb. 1571 in Weil (Württemberg), gest. 1630 in Regensburg) im Jahre 1618 aufgestellten Gesetze der Planetenbewegung, welche in etwas abgeänderter Form folgendermafsen lauten:

1. Die Mittelpunkte der Planeten bewegen sich in ebenen Kurven, deren Ebenen durch den Sonnen-Mittelpunkt gehen; der vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Mittpunkte eines Planeten gezogen gedachte Fahrstrahl beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, deren einer Brennpunkt der Mittelpunkt der Sonne ist.
3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Halbachsen ihrer Bahnen.

Das erste Gesetz sagt aus, dass die Planeten Centralbewegungen ausführen mit der Sonne als Centralkörper (s. S. 85).

Das zweite Gesetz folgt aus der Annahme einer mit r^2 umgekehrt proportionalen Anziehungskraft. Für die auf S. 92 behandelte Bewegung, bei der K mit r direkt proportional war, ergab sich zwar auch eine elliptische Bahn, doch lag dort das Centrum im Mittelpunkte der Ellipse, während es jetzt in dem einen Brennpunkte sich befindet.

Das dritte Gesetz ist der Inhalt der Gl. 19, welche entstand, indem man q für alle Planeten als von gleicher Grösse annahm.

Kepler folgerte diese Gesetze aus seinen und Tycho de Brahe's (geb. 1546 in Knudstrup (Dänemark), gest. 1601 in Prag) Beobachtungen und gab damit eine Beschreibung der vorhandenen Bewegungen, die er aus den sehr verwickelten scheinbaren Bewegungen in Bezug auf die Erde abgeleitet hatte. Die mechanische Entwickelung erfolgte erst 67 Jahre später durch Newton, der eben aus den nach den Kepler'schen Gesetzen erfolgenden Bewegungen die Ursache derselben, nämlich die Massenanziehung nach Gl. 18 folgerte.

Verhältnis der Masse der Sonne zu der eines Planeten.

Gl. 15 giebt die Möglichkeit, die Masse der Sonne mit derjenigen eines Planeten zu vergleichen, falls letzterer von einem Mond umkreist wird. Beziehen sich nämlich q, a und t auf den

Umlauf eines Mondes um seinen Planeten, q_1, a_1 und t_1 auf den Umlauf des Planeten um die Sonne, so ist nach Gl. 15

$$t^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{q}; \quad t_1{}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a_1{}^3}{q_1}; \quad \text{daher}$$

20) $$\frac{q_1}{q} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_1}{a}\right)^3;$$

das gleiche Verhältnis gilt nach Gl. 18 auch für die Massen der Centralkörper, d. h. der Sonne und des Planeten.

Die grosse Halbachse a_1 der Erdbahn ist 398,87 mal so gross wie die grosse Halbachse a der Mondbahn; die Umlaufszeit der Erde ist $t_1 = 365{,}26$ Tage, die des Mondes $t = 27{,}32$ Tage. Hiermit wird

$$\frac{q_1}{q} = \left(\frac{27{,}32}{365{,}26}\right)^2 \cdot 398{,}87^3 = 355\,000,$$

d. h. die Masse der Sonne ist 355 000 mal so gross wie die der Erde.

Für die Erde als Centralkörper war $q = g \cdot R^2 = 9{,}81 \cdot 6\,370\,000^2$ (Gl. 16); für die Sonne als Centralkörper wird hiernach

$$q_1 = 355\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 6\,370\,000^2 = 1\,413 \cdot 10^{17}.$$

Sollte die Erde in einem Abstand $r = 148\,472 \cdot 10^6$ Meter von der Sonne (dies ist etwa die grosse Halbachse der Erdbahn) sich **kreisförmig** bewegen, so müsste sie nach Gl. 14 eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{q_1}{r}} = \left(\frac{1413 \cdot 10^{17}}{148\,472 \cdot 10^6}\right)^{1/2} = 30\,850 \text{ m/s.}$$

haben. Diese Bedingung ist wirklich nahezu erfüllt, und daher ist die Bahn der Erde nur sehr wenig excentrisch; die beiden Achsen der Ellipse verhalten sich wie 7001 : 7000. Wäre die Geschwindigkeit $\sqrt{2}$ mal grösser, so würde die Bahnlinie nicht mehr geschlossen sein können.

Potential.

Die Kräftefunktion U solcher Kräfte, die nach dem Newton'schen Gesetze veränderlich sind, wird, unter Fortlassung der Konstanten C und mit negativem Vorzeichen genommen, im Besonderen das Potential V dieser Kräfte genannt. Nach S. 98 ist

$$U = \frac{k \cdot m_1 m}{r} + C, \quad \text{daher} \quad V = -\frac{k \cdot m_1 m}{r}.$$

Für $r = \infty$ wird $V = 0$.

Bewegt sich ein Massenpunkt m aus einem Abstand r vom Centrum m_1 in unendlich grosse Entfernung, so ist die dabei verrichtete Arbeit

$$U_\infty - U = 0 - \frac{k m_1 m}{r} = V.$$

Das Potential V der von einem Centrum m_1 ausgehenden Anziehungskraft ist daher diejenige Arbeit, welche von der Kraft geleistet wird, wenn der Massenpunkt m aus dem Abstand r sich in unendliche Entfernung begiebt. Nach welcher Richtung und auf welchem Wege diese Bewegung erfolgt, ist nach S. 89 gleichgültig.

Ist für die Anfangslage des beweglichen Punktes die Geschwindigkeit c, der Abstand r_0, das Potential V_0, für die Endlage die Geschwindigkeit v, der Abstand r, das Potential V, so ist

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} = U - U_0 = V_0 - V, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{m v^2}{2} + V = \frac{m c^2}{2} + V_0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{m v^2}{2} + V$$

eine unveränderliche Grösse.

Die Niveauflächen sind Flächen gleichen Potentials (s. S. 90).

5. Wurfbewegung mit Luftwiderstand.

Legt man durch die Anfangsgeschwindigkeit c der Bewegung eine lothrechte Ebene, nimmt in dieser die AX wagerecht, die AY lothrecht nach oben, so muss die Bewegung in der Ebene XAY (Fig. 96) erfolgen, weil dieselbe die Anfangsgeschwindigkeit, sowie auch die Kräfte mg und den Widerstand $W = mg \cdot v^2 : k^2$ enthält (s. S. 74).

Es ergiebt sich dann, wenn ϑ der Neigungswinkel der Bahn an beliebiger Stelle ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{W}{m}\cos\vartheta = -\frac{g}{k^2} v^2 \cdot \cos\vartheta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{W}{m}\sin\vartheta = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\cdot\sin\vartheta\right).$$

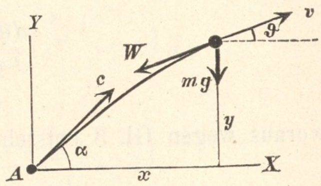
Setzt man nun

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad \cos\vartheta = \frac{dx}{ds}; \quad \sin\vartheta = \frac{dy}{ds}, \quad \text{so wird}$$

1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} \quad \text{und}$$

2) $$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\left(1 + \frac{1}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}\right).$$

Fig. 96.



Schreibt man Gl. 1:

$$\frac{\left(\frac{d^2x}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{g}{k^2}ds, \quad \text{so folgt}$$

$$\mathfrak{l}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{g}{k^2}s + \mathfrak{l}(c\cdot\cos\alpha) \quad \left(\text{weil } \frac{dx}{dt} = c\cdot\cos\alpha \text{ für } s = 0\right) \text{ und}$$

$$\mathfrak{l}\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{c\cdot\cos\alpha}\right) = -\frac{g}{k^2}s, \quad \text{oder}$$

3) $$\frac{dx}{dt} = v_x = c\cdot\cos\alpha\cdot e^{-\frac{g}{k^2}s}.$$

Führt man für die weitere Behandlung die Hülfsgrösse

$$\varphi = \frac{dy}{dx}$$

ein, so wird aus $dy = \varphi\cdot dx$, wenn man nach dt differentiirt und bedenkt, dass φ und dx beide von t abhängen:

$$d^2y = \varphi\cdot d^2x + dx\cdot d\varphi, \quad \text{also}$$

4) $$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Aus Gl. 2 wird aber, wenn man auch darin $dy = \varphi\cdot dx$ setzt:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\varphi\cdot\frac{dx}{dt},$$

oder, weil nach Gl. 1:

$$-\frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}:$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \varphi\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Verbindet man dies mit Gl. 4, so erhält man

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

also, wenn man beiderseits mit $dx : dt$ dividirt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

woraus wegen Gl. 3 entsteht:

$$5) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g}{c^2 \cos^2\alpha} \cdot e^{\frac{2g}{k^2}s}.$$

Die weitere Behandlung der Aufgabe ist nur mittels zeichnerischer Flächenermittelung oder mittels Hülfstabellen möglich. Ein näheres Eingehen auf diesen für die Militärwissenschaft sehr wichtigen Gegenstand liegt ausserhalb des Rahmens dieses Buches. Es möge hier auf das Compendium der theoretischen äusseren Ballistik, von Professor Dr. Cranz (Stuttgart), 1896, Verlag von B. G. Teubner (Leipzig) verwiesen werden.

Besonderer Fall einer flachen Wurfbahn.

Eine annähernde Lösung in geschlossener Form ergiebt sich für flache Wurfbahnen, bei denen man die Bogenlängen mit ihren wagerechten Projektionen vertauschen, also $ds = dx$; $s = x$; $\cos\alpha = 1$; $\cos\vartheta = 1$; $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$; $\operatorname{tg}\vartheta = \varphi = \vartheta$ setzen darf. Dann ergiebt Gl. 3:

$$6) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = c \cdot e^{-\frac{g}{k^2}x}, \text{ also}$$

$$dt = \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{g}{k^2}x} \cdot dx \text{ und daraus}$$

$$7) \qquad t = \frac{k^2}{c \cdot g}\left(e^{\frac{g}{k^2}x} - 1\right), \text{ oder}$$

$$8) \qquad x = \frac{k^2}{g} \cdot \mathrm{l}\left(1 + \frac{g \cdot c}{k^2}t\right).$$

Aus Gl. 5 wird

$$d\varphi = d\vartheta = -\frac{g}{c^2} e^{\frac{2g}{k^2}x} dx \quad \text{und giebt}$$

9) $$\vartheta = \alpha - \frac{k^2}{2c^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right);$$

daher $$dy = \vartheta \cdot dx = \alpha \cdot dx - \frac{k^2}{2c^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right) dx$$

und durch Integration

10) $$y = x\left(\alpha + \frac{k^2}{2c^2}\right) - \frac{k^4}{4gc^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right).$$

Setzt man $y = 0$ und $x =$ der **Wurfweite** l, so wird aus Gl. 10, wenn man nach dem Steigungswinkel α auflöst:

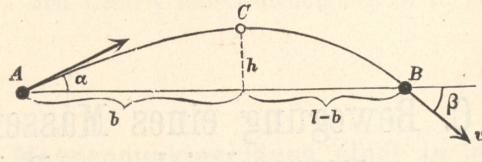
11) $$\alpha = \frac{k^4}{4g \cdot c^2 l}\left(e^{\frac{2g}{k^2}l} - 1\right) - \frac{k^2}{2c^2}.$$

Für den **Scheitelpunkt** C der Bahnlinie (Fig. 97) sei $x = b$, $y = h$; die Bedingung dafür ist $\vartheta = 0$; hiermit giebt Gl. 9, nach $x = b$ aufgelöst:

12) $$b = \frac{k^2}{2g} \mathfrak{l}\left(1 + \frac{2c^2}{k^2}\alpha\right).$$

Die **Pfeilhöhe** h der Wurfbahn findet man, indem man den Zahlenwerth von b in die Gl. 10 der Bahnlinie einsetzt; es ist dann $h = y$.

Fig. 97.



Die Zeiten t_1 und t_2, nach denen der Massenpunkt in C bezw. B angelangt ist, ergeben sich, wenn man in Gl. 7 für x die Werthe b bezw. l einführt.

Beispiel: Eine Kruppsche Kanone von $0{,}305^{\mathrm{m}}$ lichter Weite, also $0{,}07306^{\mathrm{qm}}$ Öffnungsquerschnitt, schiesst Granaten von 1^{m} Länge und 455^{kg} Gewicht. Die Granate hat eine annähernd kegelförmige Spitze, deren Kegelseite mit der Achse einen Winkel ε bildet, u. zw. ist ungefähr $\sin\varepsilon = 0{,}5$. Dann beträgt der Luftwiderstand nach 2. Theil, S. 356, Gl. 16 bei einer Geschwindigkeit v

$$W = 0{,}83 \frac{\gamma}{g} F v^2 \sin\varepsilon,$$

oder mit $\gamma = 1{,}2$; $F = 0.07306$; $\sin \varepsilon = 0{,}5$:

$$W = 0{,}00371 \cdot v^2.$$

Für $W = mg = 455$ wird $v = k$ (Gleichgewichtsgeschwindigkeit), also

$$k = \sqrt{\frac{455}{0{,}00371}} = 350\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}.$$

Für eine Wurfweite $l = 8460^{\mathrm{m}}$ sollen der Höhenwinkel (Steigungswinkel) α und die Einzelseiten der Bewegung berechnet werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c = 630\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$.

Gl. 11 liefert für den Steigungswinkel $\alpha = 0{,}1740$ = rund 10^0, was mit dem Schiessversuch übereinstimmt. Für die Gesammtdauer t_2 des Wurfes giebt Gl. 7 mit $x = 8460$:

$$t_2 = 19{,}14^{\mathrm{s}}.$$

Die Geschwindigkeit $v = v_x$ bei B (Fig. 97) wird nach Gl. 6:

$$v_x = 630 \cdot e^{-\frac{g\,l}{k^2}} = 320\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}};$$

die Neigung β der Bahn nach Gl. 9:

$$\beta = -0{,}270 = -15{,}5^0.$$

Der Scheitelpunkt der Bahn liegt nach Gl. 12 um $b = 4521^{\mathrm{m}}$ vom Ausgangspunkt entfernt und nach Gl. 10 in einer Höhe $h = 462^{\mathrm{m}}$. Die Zeit, nach welcher dieser Scheitelpunkt erreicht wird, beträgt nach Gl. 7: $t_1 = 9{,}12^{\mathrm{s}}$; der abfallende Theil der Bahnlinie von 3739^{m} wagerechter Projektion wird in $t_2 - t_1 = 10{,}02^{\mathrm{s}}$ zurückgelegt.

C. Bewegung eines Massenpunktes auf vorgeschriebener Bahnlinie.

Bei den vorstehenden Untersuchungen war der Massenpunkt nur gegebenen Kräften unterworfen und führte unter deren Einwirkung mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit eine freie Bewegung aus. Ist der Massenpunkt aber mit festen, unbeweglichen Körpern in Berührung, die ihm für seine Bewegung eine bestimmte Bahnlinie vorschreiben, ihn auf diese beschränken, so kann man diesen Zwang, diese Einwirkung auf die Bewegung des Punktes, durch