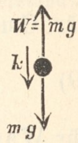
Bei der mit der Geschwindigkeit Null beginnenden Fallbewegung kann die Geschwindigkeit v nach Gl. 12 den Werth k aber erst nach unendlich langer Zeit erreichen, denn $v = k$ giebt in dieser Gl. $t = \infty$. Die mit einer Geschwindigkeit, kleiner als k, beginnende Fallbewegung nähert sich daher asymptotisch der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k. Bei sehr grosser Fallhöhe kann annähernd die Endgeschwindigkeit $v_1 = k$ gesetzt werden. Ertheilt man dem Punkt im Sinne abwärts eine Geschwindigkeit $> k$, so ist seine Bewegung eine verzögerte, nähert sich aber mit abnehmender Geschwindigkeit, und zwar ebenfalls asymptotisch, wie man leicht findet, der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k.

Fig. 78.



Lässt man den Massenpunkt von einer Höhe $h = \frac{k^2}{2g}$ herabfallen, so würde er ohne Wirkung des Luftwiderstandes eine Endgeschwindigkeit k erhalten. Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes aber wird nach Gl. 10:

16) $$v_1 = k\sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0{,}795\,k$$

oder rund $0{,}8\,k$.

c) Bestimmung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k.

Ist γ das Gewicht von 1^{cbm} des widerstehenden Mittels; F der grösste Querschnitt des Körpers, rechtwinklig zur Bewegungsrichtung genommen; V der Rauminhalt, $\gamma_1 V$ das Gewicht des Körpers; ζ eine von der Form und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängige Widerstandsziffer, so wird nach 2. Theil, S. 326, Gl. 3

$$W = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

daher, nach Gl. 1 (S. 74), für $v = k$:

$$mg = \gamma_1 V = \zeta \gamma F \frac{k^2}{2g}, \quad \text{also}$$

17) $$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{2g}{\zeta}.$$

Setzt man für kugelförmige Körper vom Halbmesser r $\zeta = 0{,}5$; $V = {}^4\!/_3\, r^3 \pi$; $F = r^2 \pi$, so entsteht

18) $$\frac{k^2}{2g} = \frac{8}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma} r \quad \text{und} \quad k^2 = 52{,}32 \frac{\gamma_1}{\gamma} r.$$

Für Gusseisenkugeln ($\gamma_1 = 7200$) in Luft ($\gamma = 1{,}29$) wird

19) $$\frac{k^2}{2g} = 14884\, r \quad \text{und} \quad k^2 = 292014\, r.$$

Für Wassertropfen oder Eiskugeln ($\gamma_1 = 1000$) in Luft ($\gamma = 1{,}29$)

20) $$\frac{k^2}{2g} = 2067\, r \quad \text{und} \quad k^2 = 40561\, r.$$

Für Gusseisenkugeln ($\gamma_1 = 7200$) in Wasser ($\gamma = 1000$) darf der Auftrieb γV des Wassers nicht vernachlässigt werden, oder es kommt bei der Berechnung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k nur das scheinbare Gewicht der Kugel in Bezug auf Wasser $(\gamma_1 - \gamma) V$ (s. 2. Theil, S. 185) in Frage; d. h.

$$(\gamma_1 - \gamma) V = \gamma \zeta F \frac{k^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} \frac{V}{F} \frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} \frac{V}{F} \frac{2g}{\zeta}.$$

Dies giebt:

21) $$\frac{k^2}{2g} = 6{,}2 \cdot \frac{8}{3} r = 16{,}5\, r \quad \text{und} \quad k^2 = 324\, r.$$

Beispiel 1: Eine Gusseisenkugel von $r = 0{,}04^{\mathrm{m}}$ Halbmesser werde mit einer Geschwindigkeit $c = 500^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. lothrecht aufwärts geschossen. Es sollen h, t_1, v_1 und t_2 berechnet werden.

Zunächst ist nach Gl. 19

$$\frac{k^2}{2g} = 14884 \cdot 0{,}04 = 595\,; \quad k^2 = 292014 \cdot 0{,}04 = 11681 \quad \text{und} \quad k = 108^{\mathrm{m}};$$

$$\frac{c}{k} = 4{,}63\,; \quad \frac{k}{g} = 11.$$

Dann wird die Steigdauer (Gl. 4)

$$t_1 = 11 \cdot \operatorname{arc\,tg} 4{,}63 = 11 \cdot \operatorname{arc} 77^0\, 49' = 11 \cdot 1{,}3582 = 14{,}9^{\mathrm{s}}.$$

$$\left(\text{gegen} \quad \frac{500}{g} = 51^{\mathrm{s}} \quad \text{ohne Luftwiderstand}\right).$$

Die Steighöhe (Gl. 6)

$$h = 595\, \mathrm{l}\,(1 + 4{,}63^2) = 595 \cdot 3{,}090 = 1839^{\mathrm{m}}$$

$$\left(\text{gegen} \quad \frac{500^2}{2g} = 12742^{\mathrm{m}} \quad \text{ohne Luftwiderstand}\right).$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit unten (Gl. 11)

$$v_1 = \frac{500}{\sqrt{1 + 21{,}44}} = 105{,}5,$$

mithin nur wenig kleiner als $k = 108$ (gegen $c = 500$ ohne Luftwiderstand).

Die Falldauer (Gl. 13)

$$t_2 = \frac{11}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{108 + 105{,}5}{108 - 105{,}5}\right) = 5{,}5 \cdot 4{,}4427 = 24{,}4^{\mathrm{s}}.$$

also selbstverständlich $t_2 > t_1$ (gegen 51^{s} ohne Luftwiderstand).

Bei geringer Geschwindigkeit c ist die Wirkung des Luftwiderstandes unerheblich. Dieselbe Kugel mit $k = 108$ erreicht mit $c = 21{,}6^{\mathrm{m}}$ Geschwindigkeit eine Höhe $h = 23{,}3^{\mathrm{m}}$ (gegen $23{,}8^{\mathrm{m}}$ ohne Luftwiderstand).

Beispiel 2: Die aus grosser Höhe herabfallenden Regentropfen, Schlossen, Hagelkörner u. dergl. bewegen sich in der Nähe des Erdbodens nahezu gleichförmig mit der Geschwindigkeit k. Nach Gl. 20 ist k verhältnisgleich mit $\sqrt{r}$; kleine Tropfen haben daher sehr geringe Geschwindigkeit, während dicke Tropfen mit grösserer Geschwindigkeit auf den Boden schlagen. Für solche kann $r = 2{,}5^{\mathrm{mm}} = 0{,}0025^{\mathrm{m}}$ sein, dann wird

$$\frac{k^2}{2g} = 5{,}16^{\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad k = 10{,}1^{\mathrm{m}}.$$

Derartiger Regen hat also beim Aufschlagen eine Geschwindigkeitshöhe von nur $5{,}16^{\mathrm{m}}$, mag er aus noch so grosser Höhe fallen.

Hagelkörner kommen vor von $0{,}03^{\mathrm{m}}$ Halbmesser und $0{,}1^{\mathrm{kg}}$ Gewicht. Für diese ist die Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{k^2}{2g} = 62^{\mathrm{m}}, \qquad \text{die Geschwindigkeit } k \text{ rund } 35^{\mathrm{m}}.$$

Die Schlagwirkung eines Hagelkorns ist nach dem Werthe seines Arbeitsvermögens $\frac{1}{2}m \cdot k^2$ zu beurtheilen. Da nun m mit r^3 verhältnisgleich, k^2 aber mit r in gleichem Verhältnisse wächst, so ist die Schlagwirkung proportional mit der vierten Potenz von r. Ein Hagelkorn vom doppelten Durchmesser hat also die 16fache Wirkung eines solchen mit einfachem Durchmesser.

Beispiel 3: Wie lange gebraucht eine Gusseisenkugel von $r = 0{,}3^{\mathrm{m}}$ Halbmesser, um eine Meerestiefe von 8000^{m} zu durchsinken. Wegen der grossen Tiefe wird die Fallgeschwindigkeit bald dem Grenzwerthe k sehr nahe kommen. Es ist (Gl. 21)

$$k^2 = 324 \cdot 0{,}3 = 97{,}2, \quad \text{also}$$

$$k = 9{,}86$$

und die Zeit, wegen nahezu gleichmässiger Bewegung,

$$t_2 = 8000 : 9{,}86 = 811^{\mathrm{s}} = 13\tfrac{1}{2}^{\mathrm{min}}.$$