also
$$x = \frac{k^2}{g}\, \mathrm{l}\left\{\cos\frac{gt}{k} + \operatorname{tg}\alpha \sin\frac{gt}{k}\right\}$$

und, weil
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{k}:$$

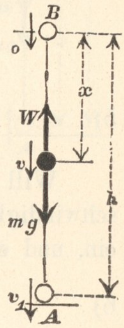
$$x = \frac{k^2}{g}\, \mathrm{l}\left\{\cos\frac{gt}{k} + \frac{c}{k}\sin\frac{gt}{k}\right\}. \tag{7}$$

b) Fallen.

Nachdem die Höhe h erstiegen wurde, beginnt das Fallen mit der Beschleunigung g, die aber mit wachsender Geschwindigkeit durch den Widerstand des Mittels vermindert wird. Nach t Sekunden sei die Höhe x durchfallen (Fig. 77), die Geschwindigkeit v geworden, dann ist die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{W}{m} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right). \tag{8}$$

Fig. 77.



Es möge zunächst die Geschwindigkeit v_1 berechnet werden, mit der der Massenpunkt unten bei A wieder anlangt; dann multiplicire man Gl. 8 mit $v\,dt = dx$:

$$v\,dv = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)dx$$

und schreibe
$$\frac{-2\frac{v}{k}\,d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2}\,dx,$$
woraus entsteht:

$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}\,x,$$

da (wegen $x = 0$; $v = 0$) die Konstante zu Null wird. Hieraus folgt für $x = h$ und $v = v_1$:

$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{v_1{}^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}\,h \quad \text{oder} \tag{9}$$

$$v_1 = k\left(1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Einfacher führt man v_1 auf die Geschwindigkeit c des Aufwurfes an derselben Stelle A zurück, indem man aus Gl. 6 und 9 die Höhe h entfernt, und erhält

$$\mathfrak{l}\left(1 - \frac{v_1^{\,2}}{k^2}\right) = -\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right) \text{ oder}$$

$$1 - \frac{v_1^{\,2}}{k^2} = \frac{1}{1 + \frac{c^2}{k^2}}, \text{ mithin}$$

11) $$\frac{\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{k}^2}}}, \text{ d. h. } v_1 < c.$$

Um nun die Falldauer zu erhalten, schreibe man Gl. 8:

$$\frac{g}{k^2}\,dt = \frac{dv}{k^2 - v^2},$$

so dass $$t = \frac{k^2}{g}\int\frac{dv}{k^2 - v^2} + C \text{ wird.}$$

Behufs der Integration bedenke man, dass

$$\frac{1}{k^2 - v^2} = \frac{A}{k + v} + \frac{B}{k - v} = \frac{Ak - Av + Bk + Bv}{k^2 - v^2}$$

geschrieben werden kann, worin, damit

$$(A + B)k - (A - B)v = 1$$

werde (für jeden beliebigen Werth von v),

$$A = B \quad \text{und} \quad 2Ak = 1$$

sein muss. Hiermit wird

$$\int\frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{1}{2k}\int\frac{dv}{k + v} + \frac{1}{2k}\int\frac{dv}{k - v}$$

$$= \frac{1}{2k}\,\mathfrak{l}\,(k + v) - \frac{1}{2k}\,\mathfrak{l}\,(k - v), \quad \text{also}$$

12) $$t = \frac{k}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k + v}{k - v}\right),$$

indem $C = 0$ wird, weil $v = 0$ richtig $t = 0$ liefert. — Setzt man nun $v = v_1$, so wird aus t die **Falldauer** t_2, d. h.

13) $$\boldsymbol{t_2} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2g}}\,\mathfrak{l}\left(\frac{\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{k} - \boldsymbol{v_1}}\right).$$

Aus Gl. 11 ergiebt sich aber

$$\frac{k + v_1}{k - v_1} = \frac{(c + \sqrt{c^2 + k^2})^2}{k^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{2}\, \mathfrak{l}\left(\frac{k + v_1}{k - v_1}\right) = \mathfrak{l}\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + k^2}}{k}\right);$$

die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 13 liefert:

$$14) \qquad t_2 = \frac{k}{g}\, \mathfrak{l}\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + k^2}}{k}\right);$$

hiermit ist die Falldauer unmittelbar auf gegebene Grössen zurückgeführt.

Die unmittelbare Beziehung zwischen x und t wird wieder etwas umständlich. Gl. 12 lässt sich schreiben

$$k + v = (k - v)\, e^{\frac{2g}{k} t},$$

woraus sich ergiebt:

$$v = \frac{dx}{dt} = k\, \frac{e^{\frac{2g}{k} t} - 1}{e^{\frac{2g}{k} t} + 1} = k\, \frac{e^{\frac{g}{k} t} - e^{-\frac{g}{k} t}}{e^{\frac{g}{k} t} + e^{-\frac{g}{k} t}}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\, \frac{e^{\frac{g}{k} t} - e^{-\frac{g}{k} t}}{e^{\frac{g}{k} t} + e^{-\frac{g}{k} t}}\, d\left(\frac{g}{k} t\right);$$

da nun der Zähler die Abgeleitete des Nenners darstellt, so ist

$$x = \frac{k^2}{g}\, \mathfrak{l}\left\{e^{\frac{g}{k} t} + e^{-\frac{g}{k} t}\right\} + C_1.$$

Weil $t = 0$ auch $x = 0$ geben muss, so wird

$$0 = \frac{k^2}{g}\, \mathfrak{l}\, 2 + C_1,$$

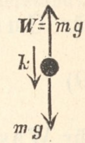
daher durch Abziehen

$$15) \qquad x = \frac{k^2}{g}\, \mathfrak{l}\left\{\frac{e^{\frac{g}{k} t} + e^{-\frac{g}{k} t}}{2}\right\}.$$

Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung würde zu Null werden, wenn die Geschwindigkeit v den Werth k erreichte, weil für diesen Fall der Widerstand $W = mg$ werden würde (Fig. 78). Ertheilt man also dem Massenpunkt in dem Sinne abwärts die Geschwindigkeit k, so führt er eine gleichmässige Bewegung aus. Daher wollen wir k die G l e i c h g e w i c h t s g e s c h w i n d i g k e i t nennen.

Bei der mit der Geschwindigkeit Null beginnenden Fallbewegung kann die Geschwindigkeit v nach Gl. 12 den Werth k aber erst nach unendlich langer Zeit erreichen, denn $v = k$ giebt in dieser Gl. $t = \infty$. Die mit einer Geschwindigkeit, kleiner als k, beginnende Fallbewegung nähert sich daher asymptotisch der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k. Bei sehr grosser Fallhöhe kann annähernd die Endgeschwindigkeit $v_1 = k$ gesetzt werden. Ertheilt man dem Punkt im Sinne abwärts eine Geschwindigkeit $> k$, so ist seine Bewegung eine verzögerte, nähert sich aber mit abnehmender Geschwindigkeit, und zwar ebenfalls asymptotisch, wie man leicht findet, der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k.

Fig. 78.



Lässt man den Massenpunkt von einer Höhe $h = \frac{k^2}{2g}$ herabfallen, so würde er ohne Wirkung des Luftwiderstandes eine Endgeschwindigkeit k erhalten. Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes aber wird nach Gl. 10:

$$16) \qquad v_1 = k\sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0{,}795\, k$$

oder rund $0{,}8\, k$.

c) Bestimmung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k.

Ist γ das Gewicht von 1^{cbm} des widerstehenden Mittels; F der grösste Querschnitt des Körpers, rechtwinklig zur Bewegungsrichtung genommen; V der Rauminhalt, $\gamma_1 V$ das Gewicht des Körpers; ζ eine von der Form und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängige Widerstandsziffer, so wird nach 2. Theil, S. 326, Gl. 3

$$W = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

daher, nach Gl. 1 (S. 74), für $v = k$:

$$mg = \gamma_1 V = \zeta \gamma F \frac{k^2}{2g}, \quad \text{also}$$

$$17) \qquad \frac{\boldsymbol{k}^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{F}}\frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{k}^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{F}}\frac{2g}{\zeta}.$$