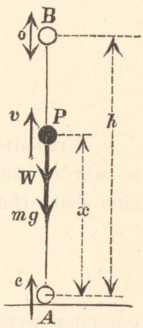
4. Lothrechte Wurf- und Fallbewegung in einem widerstehenden Mittel (Luft oder Wasser).

a) Steigen.

Wird der Massenpunkt m bei A (Fig. 76) mit der Geschwindigkeit c lothrecht aufwärts geworfen und wirken auf ihn die Schwere mg und der Widerstand W eines Mittels (etwa der Luft) verzögernd, so mag er nach t Sekunden einen Weg $AP = x$ zurückgelegt und die Geschwindigkeit v erhalten haben. Führt man, wie Gl. 2, S. 71, den Widerstand in der Form

Fig. 76.



1) $$W = mg\frac{v^2}{k^2}$$

ein, so wird die Beschleunigung

2) $$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{W}{m} = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Hieraus erhält man die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Zeit, indem man die Veränderlichen trennt, nämlich schreibt:

$$-g \cdot dt = \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{k}\right)^2} = k\frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 + \frac{v^2}{k^2}},$$

so dass entsteht $\quad g \cdot t = -k \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k} + C.$

Weil $v = c$ war für $t = 0$, so muss ferner sein

$$0 = -k \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} + C,$$

also nach Entfernung von C mittels Abziehens der letzten Gleichung von der vorhergehenden

3) $$t = \frac{k}{g}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k}\right).$$

Will man die Zeit t wissen, nach welcher die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit v zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 3 ein und erhält dadurch die

4) $$\textbf{Steigdauer } t_1 = \frac{k}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k}.$$

Zur Ermittelung der **Steighöhe** ist es am einfachsten, x als $f(v)$ zu entwickeln. Zu dem Zwecke multiplicire man Gl. 2 mit $v\,dt = dx$; dann wird

$$v\,dv = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right)dx,$$

oder nach Trennung der Veränderlichen

$$dx = -\frac{1}{2g}\,\frac{2v \cdot dv}{1 + \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{k^2}{2g}\,\frac{2\frac{v \cdot dv}{k^2}}{1 + \frac{v^2}{k^2}}, \quad \text{also}$$

$$x = -\frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right) + C.$$

Weil $x = 0$ für $v = c$, so wird

$$C = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right) \quad \text{und}$$

5) $$x = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k^2 + c^2}{k^2 + v^2}\right).$$

Will man die Höhe $x = h$ wissen, bei welcher die Geschwindigkeit zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 5 ein, und erhält die

6) $$\textbf{Steighöhe}\ \boldsymbol{h = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right)}.$$

Eine unmittelbare Beziehung zwischen x und t ist nicht sehr bequem, kann aber in folgender Weise aus Gl. 3 erhalten werden:

Man setze $$\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} = \alpha, \quad \text{also}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = k\,\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) \quad \text{und}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right)d\left(\frac{g}{k}t\right) = -\frac{k^2}{g}\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right)d\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right).$$

Nun ist

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\mathfrak{l}\,(\cos x), \quad \text{daher}$$

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\left(\cos\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right)\right) + C = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\left\{\cos\alpha \cdot \cos\frac{gt}{k} + \sin\alpha \cdot \sin\frac{gt}{k}\right\} + C,$$

$$0 = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\,(\cos\alpha) + C,$$

also $$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\cos\frac{gt}{k} + \operatorname{tg}\alpha \sin\frac{gt}{k}\right\}$$

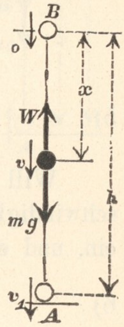
und, weil $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{k}:$$

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\cos\frac{gt}{k} + \frac{c}{k}\sin\frac{gt}{k}\right\}. \tag{7}$$

b) Fallen.

Nachdem die Höhe h erstiegen wurde, beginnt das Fallen mit der Beschleunigung g, die aber mit wachsender Geschwindigkeit durch den Widerstand des Mittels vermindert wird. Nach t Sekunden sei die Höhe x durchfallen (Fig. 77), die Geschwindigkeit v geworden, dann ist die Beschleunigung

Fig. 77.



$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{W}{m} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right). \tag{8}$$

Es möge zunächst die Geschwindigkeit v_1 berechnet werden, mit der der Massenpunkt unten bei A wieder anlangt; dann multiplicire man Gl. 8 mit $v\,dt = dx$:

$$v\,dv = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)dx$$

und schreibe $$\frac{-2\frac{v}{k}\,d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2}\,dx,$$ woraus entsteht:

$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}\,x,$$

da (wegen $x = 0$; $v = 0$) die Konstante zu Null wird. Hieraus folgt für $x = h$ und $v = v_1$:

$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{v_1^{\,2}}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}\,h \quad \text{oder} \tag{9}$$

$$v_1 = k\left(1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}\right)^{1/2}. \tag{10}$$