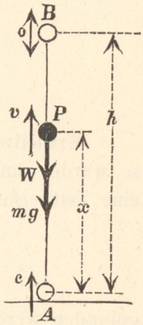
4. Lothrechte Wurf- und Fallbewegung in einem widerstehenden Mittel (Luft oder Wasser).

a) Steigen.

Wird der Massenpunkt m bei A (Fig. 76) mit der Geschwindigkeit c lothrecht aufwärts geworfen und wirken auf ihn die Schwere mg und der Widerstand W eines Mittels (etwa der Luft) verzögernd, so mag er nach t Sekunden einen Weg $AP = x$ zurückgelegt und die Geschwindigkeit v erhalten haben. Führt man, wie Gl. 2, S. 71, den Widerstand in der Form

Fig. 76.



1) $$W = mg\,\frac{v^2}{k^2}$$

ein, so wird die Beschleunigung

2) $$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{W}{m} = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Hieraus erhält man die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Zeit, indem man die Veränderlichen trennt, nämlich schreibt:

$$-g \cdot dt = \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{k}\right)^2} = k\,\frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 + \frac{v^2}{k^2}},$$

so dass entsteht $\quad g \cdot t = -k \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k} + C.$

Weil $v = c$ war für $t = 0$, so muss ferner sein

$$0 = -k \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} + C,$$

also nach Entfernung von C mittels Abziehens der letzten Gleichung von der vorhergehenden

3) $$t = \frac{k}{g}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k}\right).$$

Will man die Zeit t wissen, nach welcher die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit v zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 3 ein und erhält dadurch die

4) $$\textbf{Steigdauer}\ t_1 = \frac{k}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k}.$$

Zur Ermittelung der **Steighöhe** ist es am einfachsten, x als $f(v)$ zu entwickeln. Zu dem Zwecke multiplicire man Gl. 2 mit $v\,dt = dx$; dann wird

$$v\,dv = -g\left(1+\frac{v^2}{k^2}\right)dx,$$

oder nach Trennung der Veränderlichen

$$dx = -\frac{1}{2g}\,\frac{2v\cdot dv}{1+\dfrac{v^2}{k^2}} = -\frac{k^2}{2g}\,\frac{2\,\dfrac{v\cdot dv}{k^2}}{1+\dfrac{v^2}{k^2}}, \quad \text{also}$$

$$x = -\frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1+\frac{v^2}{k^2}\right)+C.$$

Weil $x = 0$ für $v = c$, so wird

$$C = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1+\frac{c^2}{k^2}\right) \quad \text{und}$$

5) $$x = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k^2+c^2}{k^2+v^2}\right).$$

Will man die Höhe $x = h$ wissen, bei welcher die Geschwindigkeit zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 5 ein, und erhält die

6) $$\textbf{Steighöhe}\ \boldsymbol{h = \frac{k^2}{2g}\,\mathfrak{l}\left(1+\frac{c^2}{k^2}\right)}.$$

Eine unmittelbare Beziehung zwischen x und t ist nicht sehr bequem, kann aber in folgender Weise aus Gl. 3 erhalten werden:

Man setze $$\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} = \alpha, \quad \text{also}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = k\,\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) \quad \text{und}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{gt}{k}\right)d\left(\frac{g}{k}\,t\right) = -\frac{k^2}{g}\,\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{gt}{k}\right)d\left(\alpha-\frac{gt}{k}\right).$$

Nun ist

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int\frac{d\,(\cos x)}{\cos x} = -\,\mathfrak{l}\,(\cos x), \quad \text{daher}$$

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\left(\cos\left(\alpha-\frac{gt}{k}\right)\right)+C = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\left\{\cos\alpha\cdot\cos\frac{gt}{k}+\sin\alpha\cdot\sin\frac{gt}{k}\right\}+C,$$

$$0 = \frac{k^2}{g}\,\mathfrak{l}\,(\cos\alpha)+C,$$

also $$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\cos\frac{gt}{k} + \operatorname{tg}\alpha\sin\frac{gt}{k}\right\}$$

und, weil $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{k}:$$

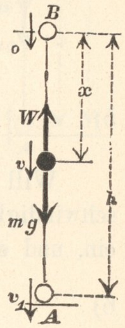
7) $$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\cos\frac{gt}{k} + \frac{c}{k}\sin\frac{gt}{k}\right\}.$$

b) Fallen.

Nachdem die Höhe h erstiegen wurde, beginnt das Fallen mit der Beschleunigung g, die aber mit wachsender Geschwindigkeit durch den Widerstand des Mittels vermindert wird. Nach t Sekunden sei die Höhe x durchfallen (Fig. 77), die Geschwindigkeit v geworden, dann ist die Beschleunigung

8) $$\frac{dv}{dt} = g - \frac{W}{m} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Fig. 77.



Es möge zunächst die Geschwindigkeit v_1 berechnet werden, mit der der Massenpunkt unten bei A wieder anlangt; dann multiplicire man Gl. 8 mit $v\,dt = dx$:

$$v\,dv = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)dx$$

und schreibe $$\frac{-2\frac{v}{k}\,d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2}\,dx,$$ woraus entsteht:

$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}\,x,$$

da (wegen $x = 0$; $v = 0$) die Konstante zu Null wird. Hieraus folgt für $x = h$ und $v = v_1$:

9) $$\mathrm{l}\left(1 - \frac{{v_1}^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}\,h$$ oder

10) $$v_1 = k\left(1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}\right)^{1/2}.$$

Einfacher führt man v_1 auf die Geschwindigkeit c des Aufwurfes an derselben Stelle A zurück, indem man aus Gl. 6 und 9 die Höhe h entfernt, und erhält

$$\mathfrak{l}\left(1-\frac{v_1^{\,2}}{k^2}\right)=-\,\mathfrak{l}\left(1+\frac{c^2}{k^2}\right) \text{ oder}$$

$$1-\frac{v_1^{\,2}}{k^2}=\frac{1}{1+\frac{c^2}{k^2}}, \text{ mithin}$$

11) $$\frac{\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{c}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{k}^2}}}, \text{ d. h. } v_1 < c.$$

Um nun die F a l l d a u e r zu erhalten, schreibe man Gl. 8:

$$\frac{g}{k^2}\,dt=\frac{dv}{k^2-v^2},$$

so dass $$t=\frac{k^2}{g}\int\frac{dv}{k^2-v^2}+C \text{ wird.}$$

Behufs der Integration bedenke man, dass

$$\frac{1}{k^2-v^2}=\frac{A}{k+v}+\frac{B}{k-v}=\frac{Ak-Av+Bk+Bv}{k^2-v^2}$$

geschrieben werden kann, worin, damit

$$(A+B)k-(A-B)v=1$$

werde (für jeden beliebigen Werth von v),

$$A=B \quad \text{und} \quad 2Ak=1$$

sein muss. Hiermit wird

$$\int\frac{dv}{k^2-v^2}=\frac{1}{2k}\int\frac{dv}{k+v}+\frac{1}{2k}\int\frac{dv}{k-v}$$

$$=\frac{1}{2k}\,\mathfrak{l}\,(k+v)-\frac{1}{2k}\,\mathfrak{l}\,(k-v), \quad \text{also}$$

12) $$t=\frac{k}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k+v}{k-v}\right),$$

indem $C=0$ wird, weil $v=0$ richtig $t=0$ liefert. — Setzt man nun $v=v_1$, so wird aus t die **Falldauer** t_2, d. h.

13) $$\boldsymbol{t_2}=\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}\boldsymbol{g}}\,\mathfrak{l}\left(\frac{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{v_1}}\right).$$

Aus Gl. 11 ergiebt sich aber

$$\frac{k+v_1}{k-v_1} = \frac{(c+\sqrt{c^2+k^2})^2}{k^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{k+v_1}{k-v_1}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{c+\sqrt{c^2+k^2}}{k}\right);$$

die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 13 liefert:

$$14)\qquad t_2 = \frac{k}{g}\,\mathrm{l}\left(\frac{c+\sqrt{c^2+k^2}}{k}\right);$$

hiermit ist die Falldauer unmittelbar auf gegebene Grössen zurückgeführt.

Die unmittelbare Beziehung zwischen x und t wird wieder etwas umständlich. Gl. 12 lässt sich schreiben

$$k+v = (k-v)\,e^{\frac{2g}{k}t},$$

woraus sich ergiebt:

$$v = \frac{dx}{dt} = k\,\frac{e^{\frac{2g}{k}t}-1}{e^{\frac{2g}{k}t}+1} = k\,\frac{e^{\frac{g}{k}t}-e^{-\frac{g}{k}t}}{e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\,\frac{e^{\frac{g}{k}t}-e^{-\frac{g}{k}t}}{e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}}\,d\left(\frac{g}{k}t\right);$$

da nun der Zähler die Abgeleitete des Nenners darstellt, so ist

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}\right\} + C_1.$$

Weil $t=0$ auch $x=0$ geben muss, so wird

$$0 = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\,2 + C_1,$$

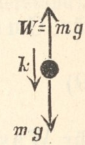
daher durch Abziehen

$$15)\qquad x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\frac{e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}}{2}\right\}.$$

Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung würde zu Null werden, wenn die Geschwindigkeit v den Werth k erreichte, weil für diesen Fall der Widerstand $W = mg$ werden würde (Fig. 78). Ertheilt man also dem Massenpunkt in dem Sinne abwärts die Geschwindigkeit k, so führt er eine gleichmässige Bewegung aus. Daher wollen wir k die G l e i c h g e w i c h t s g e s c h w i n d i g k e i t nennen.

Bei der mit der Geschwindigkeit Null beginnenden Fallbewegung kann die Geschwindigkeit v nach Gl. 12 den Werth k aber erst nach unendlich langer Zeit erreichen, denn $v = k$ giebt in dieser Gl. $t = \infty$. Die mit einer Geschwindigkeit, kleiner als k, beginnende Fallbewegung nähert sich daher asymptotisch der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k. Bei sehr grosser Fallhöhe kann annähernd die Endgeschwindigkeit $v_1 = k$ gesetzt werden. Ertheilt man dem Punkt im Sinne abwärts eine Geschwindigkeit $> k$, so ist seine Bewegung eine verzögerte, nähert sich aber mit abnehmender Geschwindigkeit, und zwar ebenfalls asymptotisch, wie man leicht findet, der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k.

Fig. 78.



Lässt man den Massenpunkt von einer Höhe $h = \frac{k^2}{2g}$ herabfallen, so würde er ohne Wirkung des Luftwiderstandes eine Endgeschwindigkeit k erhalten. Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes aber wird nach Gl. 10:

16) $$v_1 = k\sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0{,}795\,k$$

oder rund $0{,}8\,k$.

c) Bestimmung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k.

Ist γ das Gewicht von 1^{cbm} des widerstehenden Mittels; F der grösste Querschnitt des Körpers, rechtwinklig zur Bewegungsrichtung genommen; V der Rauminhalt, $\gamma_1 V$ das Gewicht des Körpers; ζ eine von der Form und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängige Widerstandsziffer, so wird nach 2. Theil, S. 326, Gl. 3

$$W = \zeta\gamma F\frac{v^2}{2g},$$

daher, nach Gl. 1 (S. 74), für $v = k$:

$$mg = \gamma_1 V = \zeta\gamma F\frac{k^2}{2g}, \quad \text{also}$$

17) $$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{2g}{\zeta}.$$

Setzt man für kugelförmige Körper vom Halbmesser r $\zeta = 0{,}5$; $V = {}^4/_3\, r^3\pi$; $F = r^2\pi$, so entsteht

18) $$\frac{k^2}{2g} = \frac{8}{3}\frac{\gamma_1}{\gamma}r \quad \text{und} \quad k^2 = 52{,}32\frac{\gamma_1}{\gamma}r.$$

Für Gusseisenkugeln ($\gamma_1 = 7200$) in Luft ($\gamma = 1{,}29$) wird

19) $$\frac{k^2}{2g} = 14\,884\,r \quad \text{und} \quad k^2 = 292\,014\,r.$$

Für Wassertropfen oder Eiskugeln ($\gamma_1 = 1000$) in Luft ($\gamma = 1{,}29$)

20) $$\frac{k^2}{2g} = 2067\,r \quad \text{und} \quad k^2 = 40\,561\,r.$$

Für Gusseisenkugeln ($\gamma_1 = 7200$) in Wasser ($\gamma = 1000$) darf der Auftrieb γV des Wassers nicht vernachlässigt werden, oder es kommt bei der Berechnung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k nur das scheinbare Gewicht der Kugel in Bezug auf Wasser $(\gamma_1 - \gamma)V$ (s. 2. Theil, S. 185) in Frage; d. h.

$$(\gamma_1 - \gamma)V = \gamma\zeta F\frac{k^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma}\,\frac{V}{F}\,\frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma}\,\frac{V}{F}\,\frac{2g}{\zeta}.$$

Dies giebt:

21) $$\frac{k^2}{2g} = 6{,}2 \cdot \frac{8}{3}r = 16{,}5\,r \quad \text{und} \quad k^2 = 324\,r.$$

Beispiel 1: Eine Gusseisenkugel von $r = 0{,}04^{\text{m}}$ Halbmesser werde mit einer Geschwindigkeit $c = 500^{\text{m}}/_{\text{s.}}$ lothrecht aufwärts geschossen. Es sollen h, t_1, v_1 und t_2 berechnet werden.

Zunächst ist nach Gl. 19

$$\frac{k^2}{2g} = 14\,884 \cdot 0{,}04 = 595\,; \quad k^2 = 292\,014 \cdot 0{,}04 = 11\,681 \quad \text{und} \quad k = 108^{\text{m}};$$

$$\frac{c}{k} = 4{,}63\,; \quad \frac{k}{g} = 11.$$

Dann wird die Steigdauer (Gl. 4)

$$t_1 = 11 \cdot \operatorname{arc\,tg} 4{,}63 = 11 \cdot \operatorname{arc} 77^0\,49' = 11 \cdot 1{,}3582 = 14{,}9^{\text{s.}}$$

$$\left(\text{gegen} \quad \frac{500}{g} = 51^{\text{s.}} \quad \text{ohne Luftwiderstand}\right).$$

Die Steighöhe (Gl. 6)

$$h = 595\,\mathrm{l}\,(1 + 4{,}63^2) = 595 \cdot 3{,}090 = 1839^{\text{m}}$$

$$\left(\text{gegen} \quad \frac{500^2}{2g} = 12\,742^{\text{m}} \quad \text{ohne Luftwiderstand}\right).$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit unten (Gl. 11)

$$v_1 = \frac{500}{\sqrt{1 + 21{,}44}} = 105{,}5\,,$$

mithin nur wenig kleiner als $k = 108$ (gegen $c = 500$ ohne Luftwiderstand).

Die Falldauer (Gl. 13)

$$t_2 = \frac{11}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{108 + 105{,}5}{108 - 105{,}5}\right) = 5{,}5 \cdot 4{,}4427 = 24{,}4^{\,\mathrm{s.}}$$

also selbstverständlich $t_2 > t_1$ (gegen $51^{\mathrm{s.}}$ ohne Luftwiderstand).

Bei geringer Geschwindigkeit c ist die Wirkung des Luftwiderstandes unerheblich. Dieselbe Kugel mit $k = 108$ erreicht mit $c = 21{,}6^{\,\mathrm{m}}$ Geschwindigkeit eine Höhe $h = 23{,}3^{\,\mathrm{m}}$ (gegen $23{,}8^{\,\mathrm{m}}$ ohne Luftwiderstand).

Beispiel 2: Die aus grosser Höhe herabfallenden Regentropfen, Schlossen, Hagelkörner u. dergl. bewegen sich in der Nähe des Erdbodens nahezu gleichförmig mit der Geschwindigkeit k. Nach Gl. 20 ist k verhältnisgleich mit $\sqrt{r}$; kleine Tropfen haben daher sehr geringe Geschwindigkeit, während dicke Tropfen mit grösserer Geschwindigkeit auf den Boden schlagen. Für solche kann $r = 2{,}5^{\,\mathrm{mm}} = 0{,}0025^{\,\mathrm{m}}$ sein, dann wird

$$\frac{k^2}{2\,g} = 5{,}16^{\,\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad k = 10{,}1^{\,\mathrm{m}}.$$

Derartiger Regen hat also beim Aufschlagen eine Geschwindigkeitshöhe von nur $5{,}16^{\,\mathrm{m}}$, mag er aus noch so grosser Höhe fallen.

Hagelkörner kommen vor von $0{,}03^{\,\mathrm{m}}$ Halbmesser und $0{,}1^{\,\mathrm{kg}}$ Gewicht. Für diese ist die Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{k^2}{2\,g} = 62^{\,\mathrm{m}}, \qquad \text{die Geschwindigkeit } k \text{ rund } 35^{\,\mathrm{m}}.$$

Die Schlagwirkung eines Hagelkorns ist nach dem Werthe seines Arbeitsvermögens $\frac{1}{2}\,m \cdot k^2$ zu beurtheilen. Da nun m mit r^3 verhältnisgleich, k^2 aber mit r in gleichem Verhältnisse wächst, so ist die Schlagwirkung proportional mit der vierten Potenz von r. Ein Hagelkorn vom doppelten Durchmesser hat also die 16fache Wirkung eines solchen mit einfachem Durchmesser.

Beispiel 3: Wie lange gebraucht eine Gusseisenkugel von $r = 0{,}3^{\,\mathrm{m}}$ Halbmesser, um eine Meerestiefe von $8000^{\,\mathrm{m}}$ zu durchsinken. Wegen der grossen Tiefe wird die Fallgeschwindigkeit bald dem Grenzwerthe k sehr nahe kommen. Es ist (Gl. 21)

$$k^2 = 324 \cdot 0{,}3 = 97{,}2\,, \quad \text{also}$$

$$k = 9{,}86$$

und die Zeit, wegen nahezu gleichmässiger Bewegung,

$$t_2 = 8000 : 9{,}86 = 811^{\,\mathrm{s.}} = 13\tfrac{1}{2}^{\,\mathrm{min.}}.$$

d) Übergang zur widerstandslosen Bewegung.

Der einfache Fall, in welchem nur die Schwere wirkt, lässt sich aus den vorstehenden Untersuchungen ableiten. Soll nämlich der Widerstand W zu Null werden, so muss in Gl. 1 die für W massgebende Grösse $k = \infty$ gesetzt werden. Dabei liefern dann die Gleichungen 3, 4, 5, 6, 7, 9 bis 14 Ergebnisse, die zunächst in unbestimmten Formen $\infty \cdot 0$ und $\frac{0}{0}$ auftreten, aber nach den Lehren der Differentialrechnung oder durch sonstige geeignete Umformung in die einfachen Gleichungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung übergeführt werden können. Es möge dies beispielsweise an Gl. 4 durchgeführt werden:

Mit wachsendem k, also abnehmendem $\frac{c}{k}$ verschwindet mehr und mehr der Unterschied zwischen dem Bogen $\frac{c}{k}$ und seiner Tangente, so dass $\operatorname{arc\,tg} \frac{c}{k}$ mit $\frac{c}{k}$ vertauscht werden kann. Somit wird aus Gl. 4:

$$t_1 = \frac{k}{g} \cdot \frac{c}{k} = \frac{c}{g},$$

wie es sein muss.

Durch entsprechende Behandlung gehen die übrigen Gleichungen für $k = \infty$ über in:

Gl. 5) $x = \frac{c^2 - v^2}{2g}$,

Gl. 6) $h = \frac{c^2}{2g}$,

Gl. 7) $x = \frac{ct}{2}$,

Gl. 9) $h = \frac{{v_1}^2}{2g}$,

Gl. 10) $v_1 = \sqrt{2gh}$,

Gl. 11) $v_1 = c$,

$$\text{Gl. 12)} \quad t = \frac{v}{g},$$

$$\text{Gl. 13)} \quad t_2 = \frac{v_1}{g},$$

$$\text{Gl. 14)} \quad t_2 = \frac{c}{g},$$

$$\text{Gl. 15)} \quad x = \frac{g t^2}{2}.$$

B. Freie krummlinige Bewegung eines Massenpunktes.

Eine krummlinige Bewegung entsteht, wenn Kraftrichtung und Geschwindigkeitsrichtung nicht übereinstimmen.

Die Bewegung eines Punktes im Raum ist bestimmt durch die Bewegungen seiner Projektionen auf drei Achsen. Diese Projektionsbewegungen nennt man auch Seitenbewegungen. Ist R die auf den Massenpunkt wirkende Mittelkraft, p die Beschleunigung, also $R = mp$, sind X, Y und Z die Projektionen von R auf die drei Achsen oder die Seitenkräfte in der Richtung der Achsen, p_x, p_y, p_z die entsprechenden Beschleunigungen, d. h. die Projektionen von p auf die Achsen, so sind diese nach S. 6 zugleich die Beschleunigungen der drei Seiten- oder Projektionsbewegungen. D. h., wenn x, y, z die veränderlichen Koordinaten des Punktes, es ist

$$p_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d v_x}{dt} = \frac{X}{m};$$

$$p_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d v_y}{dt} = \frac{Y}{m};$$

$$p_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d v_z}{dt} = \frac{Z}{m}.$$

Es liegt dann die Aufgabe vor, hieraus durch Integration die Gleichungen der Projektionsbewegungen $x = f(t)$ u. s. w. zu entwickeln.