sein. Die Figur FGH lässt sich in ein Rechteck von der Breite $2{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0{,}39\sqrt{g\cdot r}$ verwandeln, was der Fläche $= r$ entspricht; die Figur JKL ebenso in ein Rechteck von der Breite $1{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0{,}64\sqrt{g\cdot r}$.

3. Bewegung unter alleiniger Einwirkung eines Flüssigkeits-Widerstandes.

Wird ein schwimmender Körper mit einer Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzt und sodann der alleinigen Einwirkung des Wasser- und Luftwiderstandes überlassen, so wird er, weil der Auftrieb der Schwerkraft das Gleichgewicht hält, eine verzögerte Bewegung in wagerechter gerader Linie ausführen. Man kann den Flüssigkeitswiderstand W mit dem Quadrate der veränderlichen Geschwindigkeit v verhältnisgleich annehmen, also setzen

1) $$W = A v^2.$$

Es empfiehlt sich nun, zur Abkürzung der Ergebnisse eine Geschwindigkeit k einzuführen, bei welcher der Körper oder Massenpunkt m einen Widerstand, gleich seinem Gewichte mg, erfährt. Dann wird aus Gl. 1:

$$mg = A k^2,$$

woraus durch Verbindung mit Gl. 1

2) $$\boldsymbol{W = mg\frac{v^2}{k^2}}$$

entsteht. Hiernach wird die Beschleunigung

3) $$\frac{dv}{dt} = -\frac{W}{m} = -g\frac{v^2}{k^2} \quad \text{oder}$$

$$dt = -\frac{k^2}{g}\frac{dv}{v^2} = \frac{k^2}{g}\,d\left(\frac{1}{v}\right), \quad \text{mithin}$$

$$t = \frac{k^2}{g}\frac{1}{v} + C;$$

weil für $t = 0$, $v = c$ war, so muss

$$0 = \frac{k^2}{g}\frac{1}{c} + C \quad \text{sein;}$$

also folgt (durch Abziehen)

$$4) \qquad t = \frac{k^2}{g}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right) \quad \text{und hieraus}$$

$$5) \qquad v = \frac{c}{1 + \frac{g}{k^2}c \cdot t}.$$

Setzt man $v = \frac{dx}{dt}$, und verwandelt $c \cdot dt$ in

$$\frac{k^2}{g} d\left(1 + \frac{g}{k^2}c \cdot t\right), \quad \text{so wird}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\frac{d\left(1 + \frac{g}{k^2}c \cdot t\right)}{1 + \frac{g}{k^2}c \cdot t}, \quad \text{also}$$

$$6) \qquad x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left(1 + \frac{g}{k^2}c \cdot t\right).$$

(Die Integrationskonstante verschwindet hier, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ wird.) Weil nach Gl. 5

$$1 + \frac{g}{k^2}c \cdot t = \frac{c}{v},$$

so kann man durch Einsetzung dieses Werthes in Gl. 6 eine unmittelbare Beziehung zwischen Geschwindigkeit v und Länge x erhalten, nämlich

$$7) \qquad x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left(\frac{c}{v}\right) \quad \text{oder} \quad v = c \cdot e^{-\frac{g}{k^2}x}.$$

Nach diesen Ergebnissen ist die Bewegung des schwimmenden Körpers weder der Zeit noch dem Orte nach begrenzt. Es wird v erst zu Null für $t = \infty$ (Gl. 5) und für $x = \infty$ (Gl. 7). Ein einmal in Bewegung gesetzter schwimmender Körper wird also, wenn der Widerstand genau proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit (Gl. 2) und die Wasserfläche unbegrenzt ist, niemals und nirgends zur

Ruhe kommen. Er würde, wenn keine Störungen eintreten, das ganze Weltmeer durchschwimmen. In Wirklichkeit dürfte dies nicht zutreffen, weil der Widerstand des Wassers der Gl. 2 nicht genau entspricht, weil das Wasser eine gewisse Klebrigkeit hat, die den Widerstand, nachdem die Geschwindigkeit sehr klein geworden ist, erheblich beeinflussen kann, weil endlich Luft und Wasser nie ganz ruhig bleiben.

Beispiel: Ergiebt ein Schiff von $mg = 3000^{\,\mathrm{t}} = 3\,000\,000^{\,\mathrm{kg}}$ Gewicht bei einer Geschwindigkeit von $7^{\,\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$ einen Widerstand von $15\,000^{\,\mathrm{kg}}$, so ist nach Gl. 2

$$k^2 = \frac{mg}{W} v^2 = \frac{3000}{15} \cdot 49 = 9800\,, \quad \text{d. h.}$$

$$k \text{ rund} = 100^{\,\mathrm{m}}.$$

Ertheilte man nun dem Schiff eine Anfangsgeschwindigkeit $c = 10^{\,\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$, so würde ohne weitere Triebkraft zur Zurücklegung einer Strecke von $1000^{\,\mathrm{m}}$ eine Zeit erforderlich sein, die aus Gl. 6 (mit $g = 10$)

$$1000 = \frac{10\,000}{10}\, \mathfrak{l} \left(1 + \frac{10}{10\,000}\, 10\, t\right)$$

gefunden werden kann. Es müsste

$$\mathfrak{l} \left(1 + \frac{t}{100}\right) = 1\,, \quad \text{oder}$$

$$1 + \frac{t}{100} = e = 2{,}7183\,, \quad \text{also}$$

$$t = 172^{\,\mathrm{s.}} \quad \text{betragen.}$$

Das Schiff hat in diesem Augenblicke noch eine Geschwindigkeit (nach Gl. 5)

$$v = \frac{10}{1 + 0{,}01\, t} = \frac{10}{2{,}72} = 3{,}68^{\,\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}\,.$$

Von der Arbeit, welche nöthig war, um dem Schiffe die Anfangsgeschwindigkeit zu ertheilen, nämlich

$$3\,000\,000 \cdot \frac{c^2}{2g} = 15\,000\,000^{\,\mathrm{mkg}},$$

sind noch
$$mg \cdot \frac{v^2}{2g} = \text{rund } 2\,030\,000^{\,\mathrm{mkg}},$$

d. h. $13{,}5\,\%$ vorhanden, $86{,}5\,\%$ durch den Wasserwiderstand aufgezehrt.

Nach einer Stunde ($t = 3600$) würde $v = 0{,}27^{\,\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$, $x = 3611^{\,\mathrm{m}}$ betragen;

nach 2 Stunden: $v = 0{,}137^{\,\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$, $x = 4290^{\,\mathrm{m}}$;

nach 10 Stunden: $v = 0{,}0277^{\,\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$, $x = 5889^{\,\mathrm{m}}$.